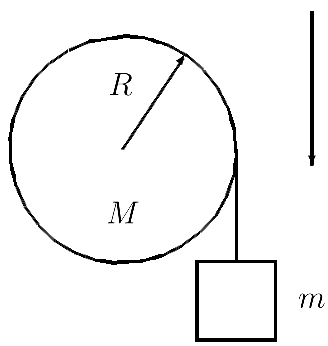
Příklady z teoretické mechaniky pro domácí počítání

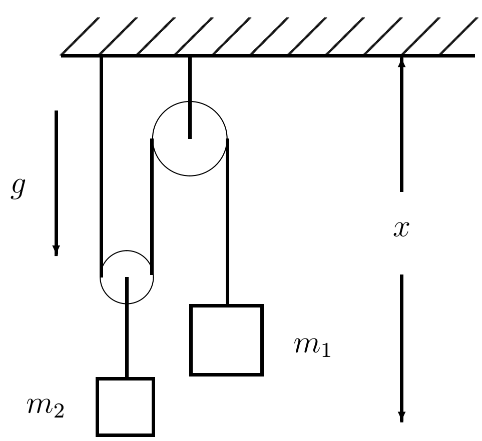
Doporučujeme spočítat příklady za nejméně 30 bodů.

http://www.physics.muni.cz/~tomtyc/mech-prik.ps
http://www.physics.muni.cz/~tomtyc/mech-prik.pdf

1. *Počet bodů: 1*
   Těleso o hmotnosti m je spojené s lanem, které se bez tření navinuje na kladku o hmotnosti M, poloměru R a momentu setrvačnosti $I = MR^2/2$. Gravitační síla působí vertikálně směrem dolů. Určete zrychlení tělesa o hmotnosti m.

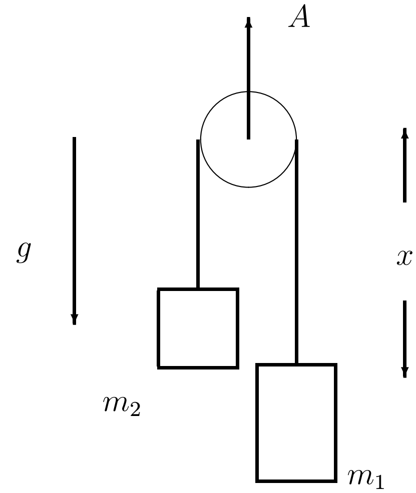


2. *Počet bodů: 1*
   Určete zrychlení tělesa o hmotnosti m_1 pomocí Lagrangeových rovnic.

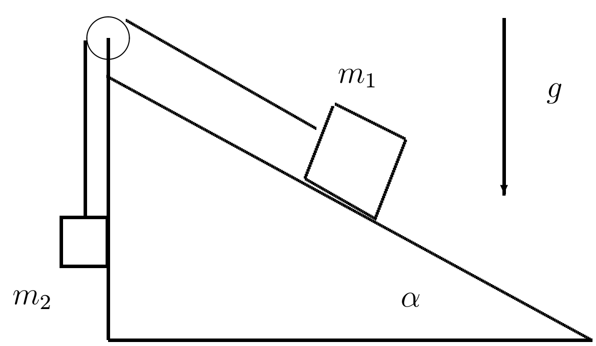


3. *Počet bodů: 1*
   Válec o hmotnosti M, poloměru R a momentu setrvačnosti $I = MR^2/2$ se valí bez klouzání dolu po nakloněné rovině. Určete zrychlení válce.

4. *Počet bodů: 1*
   Určete zrychlení tělesa o hmotnosti m_1 pomocí Lagrangeových rovnic. Kladka se pohybuje se zrychlením A nahoru. Zrychlením rozumíme zrychlení vzhledem k Zemi.



5. *Počet bodů: 2*
   Určete zrychlení tělesa o hmotnosti m_1. Nakloněná rovina je v klidu.



6. *Počet bodů: 2*
   Blok o hmotnosti m klouže bez tření po tělese ve tvaru nakloněné roviny o hmotnosti M, které

se může pohybovat v horizontální rovině také bez tření. Určete pohybové rovnice bloku a nakloněné roviny.

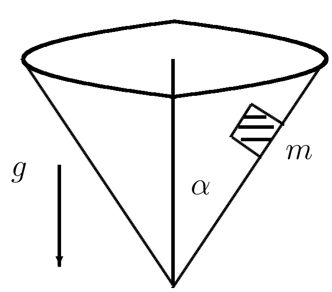
7. *Počet bodů: 2*
   Bod závěsu matematického kyvadla koná vertikální pohyb v gravitačním poli podle zákona $y = h(t)$, kde $h(t)$ je daná funkce. Zapište Lagrangeovy pohybové rovnice. Ukažte, že pohybující se kyvadlo se chová jako matematické kyvadlo na pevném závěsu v gravitačním poli $g + \ddot{h}$, kde tečky značí příslušnou derivaci podle času.

8. *Počet bodů: (a) – 2, (b) – 3*
   Těleso o hmotnosti m je upevněno na jednom konci nehmotné tyče délky l. Druhý konec tyče je připevněn k otočnému čepu tak, že tyč se může kývat v rovině. Otočný čep rotuje ve stejné rovině úhlovou rychlostí ω v kruhu o poloměru R. Ukažte, že toto „kyvadlo“ se chová jako matematické kyvadlo v gravitačním poli $g = R\omega^2$ pro všechny hodnoty l a všechny amplitudy oscilací, a to (a) úvahou, (b) pomocí Lagrangeových pohybových rovnic.

9. *Počet bodů: 2*
   Kyvadlo je tvořeno tělesem o hmotnosti m a pružinou o konstantě pružnosti k. Délka nenapjaté pružiny je l_0. Systém je umístěn ve vertikálním gravitačním poli. Zapište Lagrangeovy pohybové rovnice.

10. *Počet bodů: 2*
    Korálek o hmotnosti m klouže bez tření podél drátu, který má tvar paraboly $y = Ax^2$. Gravitační pole je vertikální. Zapište Lagrangeovy pohybové rovnice.

11. *Počet bodů: 2*
    Částice o hmotnosti m klouže po vnitřní ploše kuželu. Osa kuželu je orientovaná vertikálně s vrcholem dolů. Zapište Lagrangeovy pohybové rovnice a vyjádřete moment hybnosti částice ve vertikálním směru (osa z).



12. *Počet bodů: 2*
    Dvě částice o hmotnostech m_1, m_2 jsou spojeny tuhou tyčí zanedbatelné hmotnosti a délky l.

Této činky má být použito jako kyvadla. V jaké vzdálenosti r od středu tyče musí procházet osa otáčení, má-li být doba kmitu tohoto kyvadla minimální?

13. *Počet bodů: 3*
Lagrangeova funkce nabité částice v elektromagnetickém poli popsaném skalárním potenciálem ϕ a vektorovým potenciálem $\vec{A}$ je

$$L = \frac{1}{2}mv^2 + q\vec{A}\vec{v} - \varphi.$$

(a) Nalezněte Lagrangeovy pohybové rovnice a ukažte, že pro zrychlení částice platí

$$m\,\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}),$$

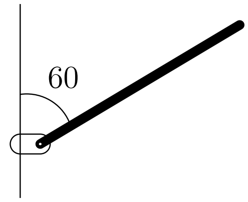
kde $\vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$ a $\vec{B} = \nabla \times A$.
(b) Nalezněte Hamiltonovu funkci a Hamiltonovy pohybové rovnice. Je kanonická hybnost $\vec{p}$ rovna mechanické hybnosti $m\vec{v}$?

14. *Počet bodů: 2*
Řetěz délky l je položen rovně na stole tak, že jeho úsek délky a visí volně přes hranu stolu. V okamžiku $t = 0$ řetěz uvolníme, takže začne bez tření klouzat ze stolu. Vyšetřete pohyb řetězu. Za jakou dobu sklouzne řetěz celý ze stolu, je-li $l = 2$ m a $a = 0,2$ m?

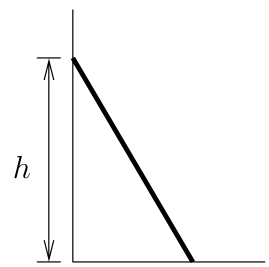
15. *Počet bodů: 2*
Najděte pohybové rovnice sférického kyvadla (jde o matematické kyvadlo, které nemusí kývat v rovině). Za zobecněné souřadnice zvolte úhly θ, φ známé ze sférických souřadnic. Jaká veličina se zachovává během pohybu?

16. *Počet bodů: 1*
Válec o poloměru r_1 a hustotě ρ_1 a koule o poloměru r_2 a hustotě ρ_2 se valí po téže nakloněné rovině. Které z obou těles dosáhne většího zrychlení? Jak závisí odpověď na hodnotách $\rho_{1,2}$ a $r_{1,2}$?

17. *Počet bodů: 1*
Homogenní tyč délky l a hmotnosti m je upevněna koncem v otočném čepu ke stěně a přidržována v klidu pod úhlem 60 stupňů od stěny (viz obrázek). Pak je uvolněna. Jakou silou působí tyč na čep v okamžiku, kdy je vodorovná?



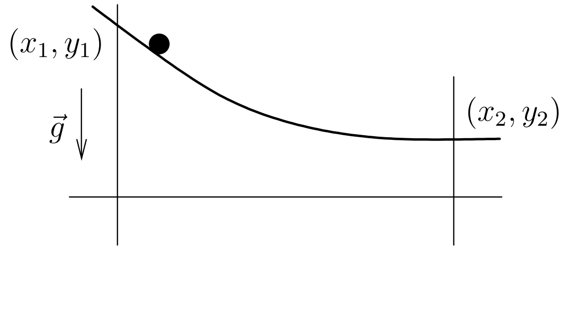
18. *Počet bodů: 3*
Homogenní tyč se opírá o dokonale hladkou stěnu (viz obrázek) a je v této poloze udržována vnější silou. V určitém okamžiku tyč uvolníme, takže začne bez tření klouzat po podlaze i po stěně. V jaké výšce bude horní konec tyče, když se oddělí od stěny? Původní výška tohoto konce je h.



19. *Počet bodů: 1*
Tělísko začne klouzat z nejvyššího bodu dokonale hladké koule o poloměru r. V jaké výšce se od koule oddělí?

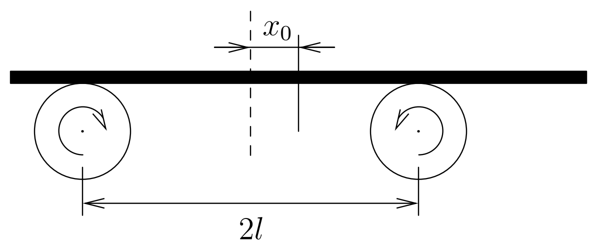
20. *Počet bodů: 1*
Krychle o hraně a spočívá v rovnováze středem dolní postavy na vrcholu koule o poloměru r. Určete podmínku pro a, r, aby rovnovážná poloha byla stabilní.

21. *Počet bodů: 4*
Pomocí variačního principu nalezněte křivku, po které se částice v gravitačním poli dostane z bodu (x_1, y_1) do bodu (x_2, y_2) za nejkratší čas (viz obrázek). V bodě (x_1, y_1) má částice nulovou rychlost.



22. *Počet bodů: 2*
Těžká homogení deska leží na dvojici válců, které rychle rotují proti sobě v opačném směru. Koeficient tření f nezávisí na relativní rychlosti desky a válců. Osy válců jsou od sebe vzdáleny

2l. Deska je zpočátku držena v klidu tak, že její těžiště se nachází ve vzdálenosti x_0 od roviny symetrie válců. V čase $t = 0$ je deska uvolněna. Popište pohyb desky po uvolnění.



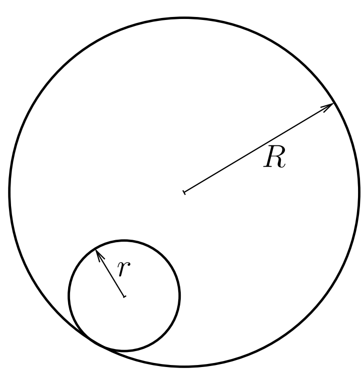
23. *Počet bodů: 2*
Vztah mezi kartézskými souřadnicemi x, y a zobecněnými souřadnicemi ξ, η v rovině je vztah

$$x = \xi \cos \omega t - \eta \sin \omega t, \quad y = \xi \sin \omega t + \eta \cos \omega t.$$

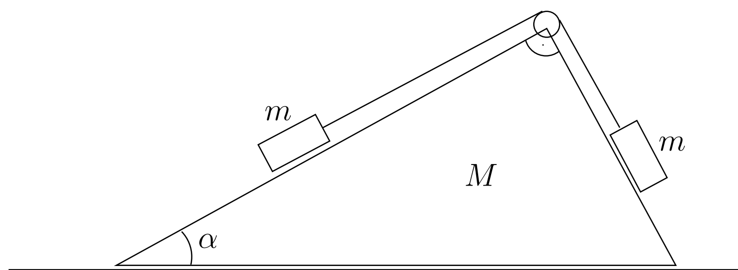
(a) Jaký je fyzikální význam souřadnic ξ, η?
(b) Nalezněte vektory rychlosti a zrychlení hmotného bodu, který se pohybuje po trajektorii $\xi(t), \eta(t)$. Vektory vyjádřete v ortonormální bázi $(\vec{e}_\xi, \vec{e}_\eta)$. Dokážete vysvětlit fyzikální význam jednotlivých členů zrychlení?

24. *Počet bodů: 1*
Vypočtěte Poissonovy závorky složek L_x, L_y vektoru momentu hybnosti a dále Poissonovu závorku $\{L^2, L_z\}$, kde $L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$.

25. *Počet bodů: 2*
Homogenní válec o poloměru r se valí uvnitř válcové dutiny o poloměru R. Najděte jeho Lagrangeovu funkci a určete frekvenci malých kmitů válce.



26. *Počet bodů: 2*
Určete zrychlení klínu na obrázku. Všechna tření zanedbáváme.



27. *Počet bodů: 2*
O vnitřní stěny rotačního paraboloidu $X^2 + y^2 = 2pz$ se opírá homogenní tyč délky a. Určete její rovnovážnou polohu.

28. *Počet bodů: 3*
Určete deformaci dlouhého kruhového válce délky l, vertikálně stojícího (podepřeného) v gravitačním poli Země.

29. *Počet bodů: 3*
Určete deformaci duté válcové roury, na kterou působí vnitřní tlak p. Vnější tlak se rovná nule, vnější poloměr je R_2, vnitřní R_1.

30. *Počet bodů: 2*
Nádoba tvaru kruhového kužele se svislou osou a vrcholem mířícím dolů je naplněna vodou. Ve vrcholu je velmi malý kruhový otvor, jehož poloměr je $1/n$ (n je velké) poloměru kruhu volné hladiny na počátku výtoku, kdy výška volné hladiny je h. Za jaký čas klesne výška volné hladiny na polovinu?

31. *Počet bodů: 3*
Určete deformaci homogenní koule vlastním gravitačním polem.

32. *Počet bodů: 2*
Nechť jsou síly působící na deformované těleso rozloženy tak, že problém můžeme považovat za rovinný. V určitém bodě P tělesa jsou známa napětí t_{xx}, t_{xy}, t_{yy}. Určete normálovou a tečnou složku napětí na rovině, která svírá s osou x úhel α.

33. *Počet bodů: 3*
Určete deformaci duté koule s vnějším poloměrem R_2 a vnitřním R_1. Uvnitř koule je tlak p_1 a vně p_2. Materiál je homogenní a iztropní kontinuum.

34. *Počet bodů: 3*
Určete deformaci homogenního válce, který se rovnoměrně otáčí kolem své osy.

35. *Počet bodů: 3*
Kapalina o vazkosti h je umístěná mezi dvěma souosými trubkami o poloměrech $R_1 < R_2$. Vnější trubka rotuje konstantní rychlostí. Popište rychlostní pole v kapalině.

36. *Počet bodů: 3*
V trubici tvaru souosého meziválcí proudí laminárně vazká kapalina. Popište rychlostní pole v trubici a určete odpor trubice proti proudění kapaliny.

37. *Počet bodů: 3*
Nekonečně dlouhý válec o poloměru R je zaplněn viskózní kapalinou. V čase $t = 0$ roztočíme válec kolem jeho osy úhlovou rychlostí ω. Odvoďte diferenciální rovnici pro rychlostní pole v kapalině.