Fyzikální praktikum 2

Předmět F3240

Návody k úlohám

únor 2013, revize 21. listopadu 2025

Kolektiv autorů

Ústav fyziky kondenzovaných látek

Přírodovědecká fakulta Masarykovy univerzity

Brno

Fyzikální praktikum 2
Předmět F3240
podzimní semestr

Seznam úloh:

1. Studium elektromagnetické indukce. 1
2. Tranzistor a zesilovač napětí. 7
3. Rozložení elektrického. 15
4. Brownův pohyb. 21
5. Magnetické pole. 26
6. Elektromagnetické kmity v RLC obvodu. 34
7. Odraz a lom světla, Fresnelovy vztahy, Snellův zákon. 47
8. Měření parametrů zobrazovacích soustav. 53
9. Závislost indexu lomu skla na vlnové délce světla. 59
10. Polarizace světla. 66
11. Interference a difrakce světla. 74
12. Spektroskopické metody. 87

Dodatky:

A. Zpracování výsledků měření. 97
B. Návod k používání osciloskopu. 99

Ústav fyziky kondenzovaných látek
Přírodovědecká fakulta, Masarykova univerzita, Brno

Fyzikální praktikum 2

1. Studium elektromagnetické indukce

Úkoly k měření

- Změřte tvar napěťových pulzů na cívce v závislosti na výchylce kyvadla s magnetem.
- Z předchozí závislosti určete poloměr cívky a magnetický moment magnetu.
- Studujte tlumení indukovaných pulzů.

Závislost indukovaných pulzů na výchylce

Teorie

Jedním z pilířů elektrodynamiky je Faradayův zákon [1], který vyjadřuje vztah mezi napětím U indukovaným v uzavřené smyčce a časovou změnou magnetického toku Φ procházejícího plochou smyčky:

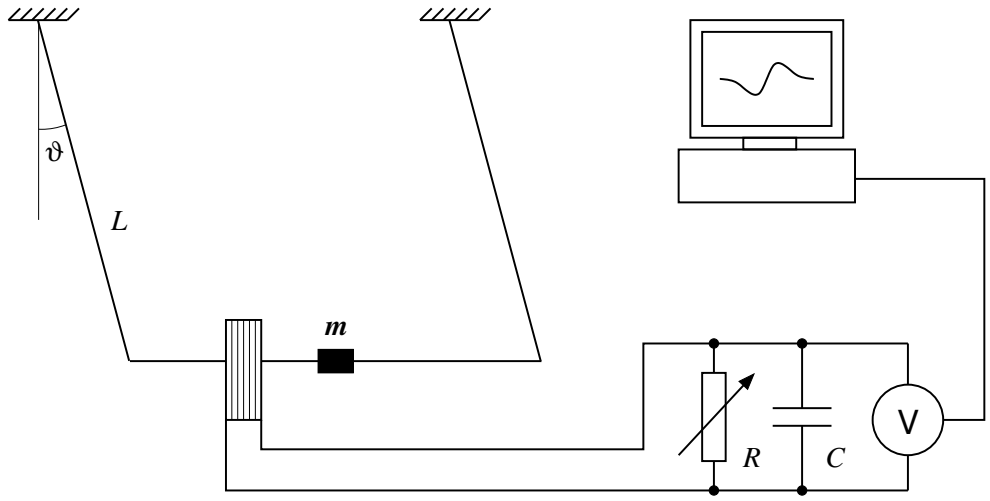
$$U = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} \,. \tag{1.1}$$

V této úloze[1] budeme studovat elektromagnetickou indukci v systému znázorněném na obrázku 1.1. Zdrojem magnetického pole je permanentní magnet upevněný na dvojitém kyvadle. Při kmitavém pohybu magnet periodicky prolétává cívkou a indukuje v ní napěťové pulzy, jejichž časovou závislost zaznamenáváme.
Aby mohla být hodnota měřeného napětí přenesena do počítače, je třeba ji převést do číselné podoby. K tomu slouží tzv. analogově-digitální (AD) převodník – zařízení, na jehož vstupu je analogový signál (v našem případě napětí a převodník tak slouží jako voltmetr) a na výstupu číselná (digitální) reprezentace tohoto signálu. AD-převodník použitý v praktiku má rozlišení 8 bitů, tedy osm číslic ve dvojkové soustavě. Je schopen rozeznat $2^8 = 256$ úrovní napětí, což při jeho napěťovém rozsahu 2,5 V představuje měření s přesností 0,01 V.

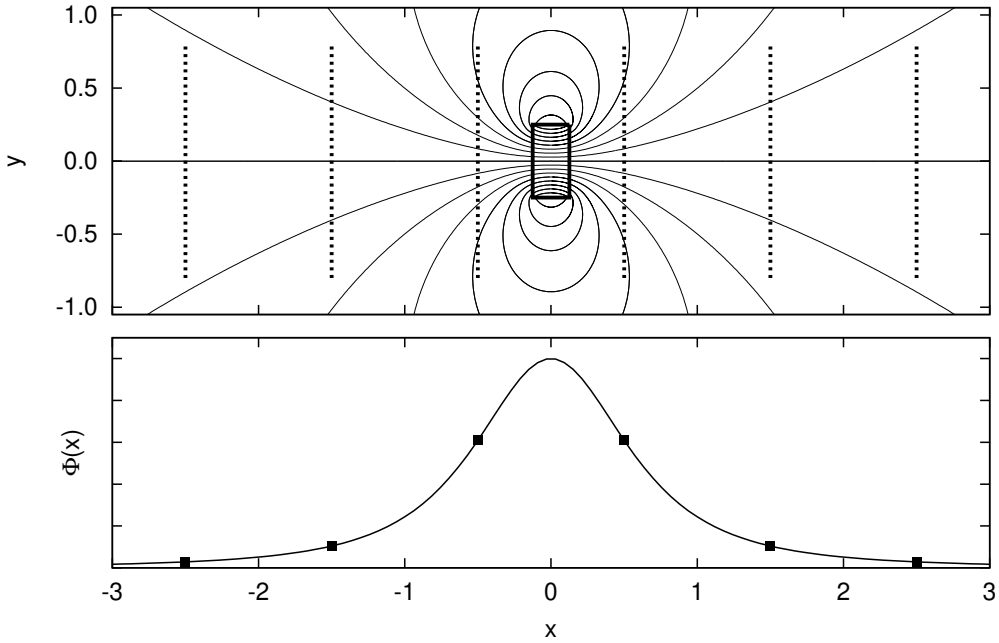
Průběh indukovaných napěťových pulzů

K indukci měřitelného napěťového pulzu dochází, pokud se magnet pohybuje v blízkosti snímací cívky. Pohyb magnetu vůči cívce v této oblasti můžeme pro jednoduchost nahradit rovnoměrným pohybem magnetu po ose cívky, popřípadě cívky po ose magnetu. Na obrázku 1.2 je ukázáno magnetické pole válcového permanentního magnetu. Uvažujme o cívce, která se pohybuje v poli magnetu, přičemž osa cívky splývá s osou magnetu. Tok magnetických indukčních čar cívkou v závislosti na vzdálenosti cívky od magnetu je vynesen ve spodní části obrázku 1.2. Napětí, které se v ní indukuje při jejím pohybu po ose, je podle Faradayova zákona (1.1) rovno záporně vzaté časové derivaci magnetického indukčního toku cívkou. Přibližuje-li se cívka k magnetu, vzrůstá tok její plochou a objevuje se záporné indukované napětí. Při průchodu kolem magnetu dosahuje magnetický indukční tok maxima, jeho časová derivace a tedy indukované napětí je v tomto bodě rovno nule. Konečně při vzdalování indukční tok klesá a indukované napětí je kladné. Svého maxima (minima) nabude indukované napětí v místě, kde magnetický indukční tok klesá (roste)

[1] Sestavení úlohy bylo inspirováno článkem [2].



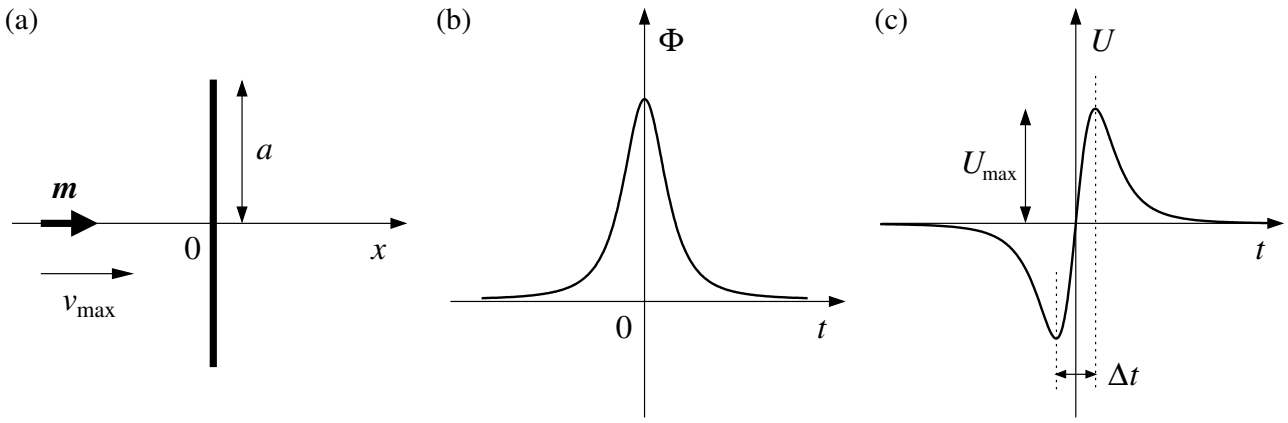
Obrázek 1.1: Schéma experimentálního uspořádání. Permanentní magnet prolétávající cívkou v ní indukuje napětí, které je snímáno počítačem. Cívka je zatížena proměnným rezistorem o odporu R, což omezuje proud v obvodu a tím přímo ovlivňuje elektromagnetické tlumení pohybu magnetu. Pro potlačení vysokofrekvenčního šumu můžeme paralelně k rezistoru zapojit kondenzátor s malou kapacitou C (řádově 100 nF).



Obrázek 1.2: Nahoře: Indukční čáry magnetického pole válcového magnetu, jehož osa je totožná s osou x. Dole: Magnetický indukční tok cívkou souosou s magnetem v závislosti na její vzdálenosti od magnetu. Polohy cívky pro zvýrazněné body na křivce jsou znázorněny přerušovanými čarami v horním panelu.

nejstrměji. Amplituda napěťového pulzu závisí na rychlosti pohybu. Čím rychleji se vůči sobě cívka a magnet pohybují, tím rychlejší jsou změny indukčního toku cívkou, což má podle Faradayova zákona za následek vyšší hodnotu indukovaného napětí.

Jednoduchý kvantitativní popis našeho experimentu je možný v přiblížení, kdy permanentní magnet nahradíme magnetickým dipólem a cívku kruhovým závitem. Dále budeme pohyb magnetu v těsné blízkosti cívky aproximovat rovnoměrným přímočarým pohybem po ose cívky rychlostí



Obrázek 1.3: (a) Boční pohled na kruhový závit o poloměru a, jímž prolétá magnet s dipólovým momentem $\boldsymbol{m}$. (b) Časová závislost magnetického indukčního toku. (c) Napětí indukované v kruhovém závitu.

$v_{\max}$, která odpovídá nejnižšímu bodu skutečné kruhové trajektorie. Zjednodušená situace je znázorněná na obrázku 1.3(a). Magnetické pole magnetického dipólu je dáno vztahem [3, 4] (v jednotkách SI[2])

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3}\left[\frac{3(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{m})\boldsymbol{r}}{r^2} - \boldsymbol{m}\right] , \tag{1.2}$$

kde $\boldsymbol{r}$ je polohový vektor vztažený na magnetický dipól, $\boldsymbol{m}$ magnetický dipólový moment a μ_0 je permeabilita vakua. Snadným výpočtem lze ověřit, že magnetický indukční tok pole magnetického dipólu orientovaného ve směru osy x plochou kruhového závitu je roven

$$\Phi(x) = \int_S \boldsymbol{B}\,\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{\mu_0 m}{2}\frac{a^2}{(a^2+x^2)^{3/2}} , \tag{1.3}$$

kde a je poloměr kruhového závitu, do jehož středu umístíme počátek osy x.
K určení napětí indukovaného v závitu při pohybu magnetu užijeme Faradayův zákon (1.1). Nechť v čase $t = 0\,\mathrm{s}$ prochází dipól středem cívky, pak je jeho souřadnice x vyjádřena vztahem $x = v_{\max}t$. Provedeme-li za tohoto předpokladu časovou derivaci magnetického indukčního toku (1.3), získáme pro napětí indukované v cívce s N závity:

$$U(t) = -N\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = \frac{3N\mu_0 m v_{\max}}{2a^2}\frac{v_{\max}t/a}{[1+(v_{\max}t/a)^2]^{5/2}} . \tag{1.4}$$

Časový průběh magnetického indukčního toku a indukovaného napětí jsou vykresleny na obrázku 1.3(b) a 1.3(c). Křivka závislosti indukovaného napětí na čase obsahuje jedno minimum a jedno maximum, které nám umožní zavést šířku pulzu Δt jako časový rozdíl mezi okamžikem maximálního a minimálního napětí a amplitudu napěťového pulzu $U_{\max}$. Je-li indukované napětí popsáno rovnicí (1.4), najdeme minimum napětí v bodě $t_{\min} = -a/2v_{\max}$ a jeho maximum v bodě $t_{\max} = +a/2v_{\max}$. Šířka pulzu je tedy nepřímo úměrná rychlosti průletu:

$$\Delta t = a\, v_{\max}^{-1} . \tag{1.5}$$

Dále můžeme určit amplitudu napětí

$$U_{\max} = \frac{24}{25\sqrt{5}}\frac{N\mu_0 m}{a^2}\, v_{\max} , \tag{1.6}$$

[2] Jednotkou magnetické indukce je 1T (tesla). Pojmenována byla po srbském fyzikovi Nikolu Teslovi (1856–1943). Oproti soustavě CGS (kde je jednotkou indukce Gauss), zde ve vzorci figuruje magnetická permeabilita vakua μ_0.

která je naopak přímo úměrná rychlosti prolétajícího magnetu.
Zbývá určit rychlost $v_{\max}$, nejsnáze ze zákona zachování energie. Je-li hmotnost magnetu spolu s jeho nosníkem rovna M, platí

$$\frac{1}{2}Mv_{\max}^2 = MgL(1-\cos\vartheta_{\max}) \ , \tag{1.7}$$

kde g je zemské tíhové zrychlení, L délka kyvadla a $\vartheta_{\max}$ úhlová amplituda jeho kmitů. Odtud

$$v_{\max} = 2\sqrt{gL}\,\sin\left(\frac{\vartheta_{\max}}{2}\right) \approx \sqrt{gL}\,\vartheta_{\max} \ . \tag{1.8}$$

Úkoly

1. Změřte závislost amplitudy a šířky napěťového pulzu indukovaného v cívce na úhlové amplitudě kmitů (a tedy na rychlosti magnetu prolétajícího cívkou) a zjistěte, zda přibližně platí, že $U_{\max}$ je přímo úměrné úhlu $\vartheta_{\max}$ ($U_{\max} \sim \vartheta_{\max}$) a čas Δt nepřímo úměrný tomuto úhlu ($\Delta t \sim \vartheta_{\max}^{-1}$).

2. Spolu s naměřenými hodnot vyneste do grafů i přímku odpovídající modelové lineární závislosti.

3. Užitím vztahu (1.5) mezi šířkou pulzu a rychlostí průletu určete efektivní poloměr použité cívky. S pomocí parametrů cívky a vztahu (1.6) dále odhadněte magnetický dipólový moment použitého magnetu.

Tlumení pohybu magnetu

Teorie

V předchozí části jsme uvažovali o netlumeném kmitavém pohybu magnetu s konstantní amplitudou výchylky. Ve skutečnosti bude ovšem pohyb tlumený a to mechanicky (kvůli odporu vzduchu) a elektromagneticky (je-li obvod snímací cívky propojen a zátěžový odpor R není příliš velký). Časová závislost poklesu amplitudy v důsledku těchto dvou tlumení má odlišný charakter, který nám umožní v experimentu rozlišit režim s převážně mechanickým a převážně elektromagnetickým tlumením.
Vyšetříme nejprve případ mechanického tlumení, přičemž budeme sledovat úbytek mechanické energie $E = Mv_{\max}^2/2$. Předpokládejme, že odporová síla způsobená třením o vzduch při nízkých rychlostech je úměrná rychlosti magnetu[3], $F = kv$. Pokud je tlumení pohybu malé, můžeme pohyb magnetu během jednoho kyvu popsat vztahem $\vartheta = \vartheta_{\max}\cos\omega t$, kde $\vartheta_{\max}$ je amplituda kmitů v daném okamžiku a $\omega = 2\pi/T$ je frekvence kmitů. Rychlost magnetu je v tomto případě rovna $v = -v_{\max}\sin\omega t$, kde $v_{\max} = \vartheta_{\max}\omega L$. Úbytek mechanické energie během jednoho kyvu, který získáme integrací výkonu odporové síly

$$\Delta E = \int_0^{T/2} Fv\,\mathrm{d}t = \int_0^{T/2} k\ v_{\max}^2 \sin^2\omega t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}Tk\ v_{\max}^2 \ , \tag{1.9}$$

je malý vůči E a pro pozvolna klesající E je tak možné sestavit diferenciální rovnici

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} \approx -\frac{\Delta E}{T/2} = -\frac{1}{2}k\ v_{\max}^2 = -\frac{k}{M}E \ . \tag{1.10}$$

[3] Lineární závislost odporu na rychlosti je vhodným přiblížením pro malé výchylky (a rychlosti) kyvadla, vedoucí k výsledkům v dostatečném souladu s experimentálně stanoveným poklesem amplitudy.

Řešením této rovnice s počáteční podmínkou $E(0) = E_0$ zjistíme, že mechanická energie, maximální rychlost magnetu i amplituda jeho kmitů exponenciálně klesají s časem

$$E(t) = E_0\,\mathrm{e}^{-kt/M}\,, \quad v_{\max}(t) \sim \sqrt{E} \sim \mathrm{e}^{-\beta t}\,, \quad \vartheta_{\max}(t) \sim \mathrm{e}^{-\beta t}\,, \quad \text{kde} \quad \beta = \frac{k}{2M}\,. \tag{1.11}$$

Nyní uvažujme o případu, kdy je tlumení pohybu magnetu čistě elektromagnetické. Ke ztrátě mechanické energie dojde při průletu magnetu cívkou, kdy indukované napětí vyvolá proud cívkou a její pole pak brzdí pohyb magnetu. Úbytek mechanické energie během jednoho kyvu stanovíme pomocí ztrátového výkonu na zatěžovacím odporu R a vlastním odporu cívky R_c

$$\Delta E = \int_{\text{průlet}} U\,I\mathrm{d}t = \int_{\text{průlet}} \frac{U^2}{R+R_c}\,\mathrm{d}t\,. \tag{1.12}$$

Vzhledem k tomu, že amplituda napětí je úměrná $v_{\max}$ a čas průletu je úměrný $v_{\max}^{-1}$, je úbytek energie úměrný $v_{\max}$. Podrobný výpočet využívající vztahu (1.4) ukazuje, že

$$\Delta E = K\,v_{\max}\,, \quad \text{kde} \quad K = \frac{45\pi}{512}\frac{N^2\mu_0^2 m^2}{(R+R_c)a^3}\,. \tag{1.13}$$

V analogii s rovnicí (1.10) můžeme psát

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} \approx -\frac{\Delta E}{T/2} = -\frac{2K}{T}\,v_{\max} = -\frac{2K}{T}\sqrt{\frac{2E}{M}} \qquad \text{odkud} \qquad \sqrt{E(t)} = \sqrt{E_0} - \frac{K}{T}\sqrt{\frac{2}{M}}\,t\,. \tag{1.14}$$

Jelikož $\vartheta_{\max}(t) \sim v_{\max}(t) \sim \sqrt{E}$, dostáváme lineární pokles amplitudy kmitů v čase

$$\vartheta_{\max}(t) = \vartheta_{\max}(0) - \alpha t\,, \quad \text{kde} \quad \alpha = \frac{2K}{TM\sqrt{gL}}\,. \tag{1.15}$$

Tento vztah je možné použít, dokud je amplituda kmitů dostatečně velká. Poté přestává platit rovnice (1.13) a především výchozí předpoklad o malém relativním úbytku mechanické energie během jednoho kyvu.

Při určení amplitudy kmitů z amplitudy indukovaného napětí je třeba vzít v úvahu, že změřená amplituda napětí je nižší než indukovaná vlivem dělení na odporech v obvodu. Pro proud v obvodu platí

$$I = \frac{U_{\max,\text{induc}}}{R+R_c} \tag{1.16}$$

a zároveň pro napětí měřené pouze na zatěžovacím odporu

$$I = \frac{U_{\max,\text{meas}}}{R} \tag{1.17}$$

Pro toto napětí pak dostaneme

$$U_{\max,\text{meas}} = U_{\max,\text{induc}}\frac{R}{R+R_c}\,. \tag{1.18}$$

Tato oprava je podstatná pro malé hodnoty zatěžovacího odporu R. Závislost amplitudy napětí na výchylce byla měřena v povinné části. Alternativně je možno určit amplitudu kmitů z šířky pulzu Δt, kde není žádná korekce nutná.

Úkoly

1. Pro několik hodnot zatěžovacího odporu R sledujte tlumení kmitavého pohybu magnetu a určete časovou závislost amplitudy kmitů $\vartheta_{\max}$. Využijte přitom amplitudy napětí (s korekcí dle (1.18)) event. šířky jednotlivých napěťových pulzů. V případě malého zatěžovacího odporu byste měli pozorovat lineární pokles amplitudy kmitů (1.15), v opačném případě je charakter poklesu spíše exponenciální (1.11).

2. Zjistěte, zda je směrnice α poklesu amplitudy kmitů pro případ dominantního elektromagnetického tlumení nepřímo úměrná $R + R_c$, jak předpovídá teorie (např. proložením závislosti hodnot $1/\alpha$ na R přímkou, průsečík s osou x by měl odpovídat hodnotě $-R_c$).

3. Stanovte koeficient útlumu β pro případ převládajícího mechanického tlumení.[4]

Literatura k úloze 1

[1] R.P. Feynman, R.B. Leighton, M. Sands: *Feynmanovy přednášky z fyziky s řešenými příklady 2/3*, Fragment (2006).

[2] A. Singh, Y.N. Mohapatra, S. Kumar, Am. J. Phys. **70**, 424 (2002).

[3] D. Griffith: *Introduction to electrodynamics*, Prentice-Hall (1999).

[4] J.D. Jackson: *Classical electrodynamics*, Willey (1999).

[4] NB: Parametry α a β mají (různé) jednotky.

Ústav fyziky kondenzovaných látek
Přírodovědecká fakulta, Masarykova univerzita, Brno

Fyzikální praktikum 2

2. Tranzistor a zesilovač napětí

Úkoly k měření

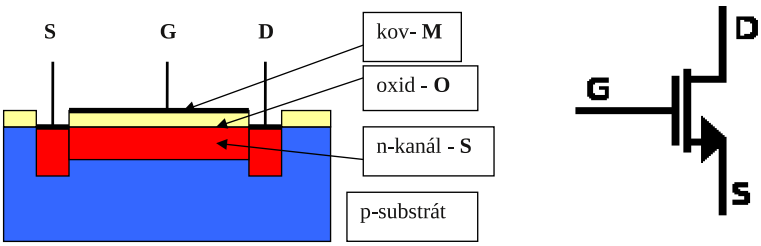
- Nelineární charakteristiky unipolárního tranzistoru.
- Strmost, vnitřní odpor a zesilovací činitel v zadaném pracovním bodě.
- Unipolární tranzistor jako zesilovač napětí.

Úvod

Nelineárním elektrickým prvkem rozumíme součástku, jejíž odpor závisí na protékajícím proudu nebo napětí. Taková součástka se neřídí Ohmovým zákonem a její voltampérová charakteristika je nelineární, je to například polovodičová dioda. Voltampérové charakteristiky některých prvků lze ovlivňovat. U fotodiody a fototranzistoru závisí tvar voltampérové charakteristiky na intenzitě světla dopadajícího na fotokatodu, resp. na p-n přechod, u bipolárního tranzistoru závisí kolektorová charakteristika na proudu procházejícím bází a u unipolárního tranzistoru závisí výstupní charakteristika na napětí hradla. Tranzistory mohou pracovat v určitém elektrickém obvodu jako zesilovače napětí nebo proudu. Pak obvod, do něhož přivádíme napětí, které chceme zesílit, je vstupní obvod a výstupní obvod je ten, ze kterého odebíráme zesílené napětí. Tomu odpovídá u unipolárního tranzistoru vstup mezi gate a source a výstup mezi drain a source. Takový elektronický prvek můžeme popsat třemi obecně nelineárními charakteristikami: vstupní charakteristikou, výstupní charakteristikou a převodní charakteristikou.
V této úloze vybereme unipolární tranzistor, u kterého změříme převodní a výstupní charakteristiky a z nich pak určíme parametry tranzistoru. Dále pak sestavíme z tranzistoru napěťový zesilovač a změříme jeho napěťové zesílení. To pak porovnáme se zesílením vypočteným z naměřených charakteristik.

Teorie

Popíšeme kvalitativně princip činnosti unipolárního tranzistoru. Jak vyplývá z názvu, podílí se na vedení proudu tranzistorem pouze jeden typ nositelů, buď elektrony, nebo díry. Vždy jsou to většinoví – majoritní – nositelé v části tranzistoru, který tvoří tzv. kanál. Elektrické přívody kanálu jsou source S (obdoba emitoru v bipolárním tranzistoru) a drain D (obdoba kolektoru v bipolárním tranzistoru). Proud tekoucí kanálem ovlivňuje napětí, které se vkládá mezi source a elektrodu, která je od kanálu izolovaná a nazývá se gate G (hradlo H). Hradlo je od kanálu izolováno buď p-n přechodem, takový tranzistor se označuje JFET (Junction Field Effect Tranzistor), nebo oxidovou vrstvou, pak jde o MOSFET (Metal Oxide Semiconductor Field Effect Tranzistor). Řez MOSFET tranzistorem a jeho schematická značka používaná ve schématech je na obr. 2.1.
Mezi source a drain je vodivý kanál, jehož odpor určují geometrické rozměry kanálu, koncentrace a pohyblivost volných elektronů v něm. Vložíme-li mezi gate G a source S napětí U_G, vnikne přes izolační vrstvu oxidu do kanálu elektrické pole, které ovlivní jeho geometrii i koncentraci elektronů. Odtud pochází název tranzistor řízený polem (FET – field effect transistor). Jsou možné čtyři typy těchto tranzistorů: s n-kanálem a s p-kanálem, oba mohou pracovat s ochuzováním kanálu (vodivý



Obrázek 2.1: Řez unipolárním tranzistorem MOSFET s n-kanálem a jeho značka.

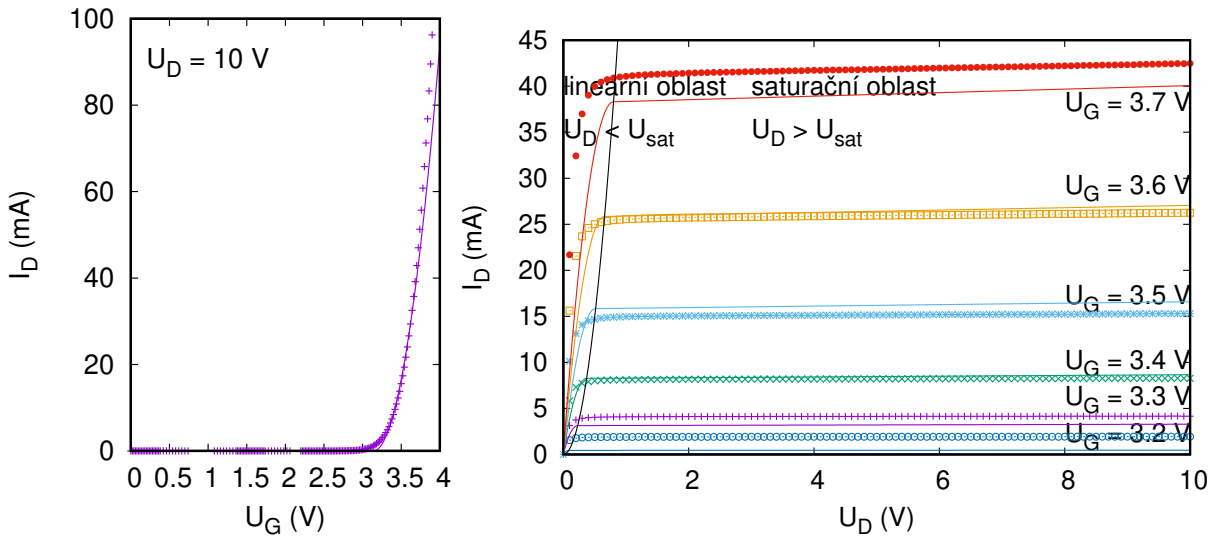
kanál existuje při nulovém napětí hradla), nebo s obohacováním (vodivý kanál při nulovém napětí hradla neexistuje a vytvoří se až při určitém napětí mezi hradlem a source, které bývá 1 až 5 V). Další informace se dají najít v odborné literatuře [1, 2].

Statické charakteristiky tranzistoru

Proud I_D protékající ze zdroje v obvodu mezi drain a source můžeme tedy regulovat napětím na hradle U_G. Toto napětí může být kladné – proud vzrůstá, nebo záporné – proud se zmenšuje. Proud $I_D = f(U_D, U_G)$ závisí na napětí U_D a na napětí hradla U_G. Teoretické odvození této závislosti značně přesahuje rozsah tohoto návodu, dá se však najít v dostupné literatuře [1, 2]. Závislost proudu I_D na napětích U_D a U_G se dá rozdělit do tzv. lineární (triodové) oblasti a saturační oblasti podle vztahu

$$I_D = \begin{cases} 0, & \text{pro } U_G < U_T \\ K\left[(U_G - U_T)U_D - cU_D^2\right], & \text{pro } U_D < U_{Dsat} \text{ a } U_G > U_T \\ K/4c(U_G - U_T)^2\left[1 + \lambda(U_D - U_{Dsat})\right], & \text{pro } U_D > U_{Dsat} \text{ a } U_G > U_T \end{cases} \tag{2.1}$$

kde U_T je prahové napětí (threshold voltage), při kterém vzniká vodivý kanál, $U_{Dsat} = \frac{U_G - U_T}{2c}$ je saturační napětí, při kterém dochází k přechodu z lineární do saturační oblasti, K, c a λ jsou parametry tranzistoru obsahující mimo materiálové parametry jako je pohyblivost nositelů náboje také jeho rozměry, zejména délku a šířku vodivého kanálu a kapacitu hradla. Porovnání reálných a teoretických charakteristik pro tranzistor IRF520 je na obrázku 2.2. Typické hodnoty parametru



Obrázek 2.2: Tranzistor IRF520: porovnání naměřené a teoretické převodní charakteristiky (vlevo), porovnání naměřených (body) a teoretických (čáry) výstupních charakteristik pro šest hodnot napětí na hradle (vpravo). Černá linie v pravém grafu odděluje lineární a saturační oblast.

c jsou v rozmezí 1/2 až 1, parametr λ vyjadřující slabou závislost proudu na napětí U_D nabývá obvykle malých hodnot v řádu $10^{-3}\,\mathrm{V}^{-1}$.
Závislost výstupního proudu I_D na (vstupním) napětí hradla U_G při konstantním výstupním napětí U_D je statická převodní charakteristika tranzistoru:

$$I_D = f(U_G), U_D = \text{konst.} \tag{2.2}$$

Závislost výstupního proudu I_D na výstupním napětí U_D je výstupní charakteristika tranzistoru:

$$I_D = f(U_D), U_G = \text{konst.} \tag{2.3}$$

Měřením těchto charakteristik můžeme získat hodnoty parametrů tranzistoru z rovnice (2.1). V tomto praktiku se však určováním těchto parametrů nebudeme zabývat a omezíme se na zjednodušenou parametrizaci.
Použijeme-li tranzistor jako zesilovač, pak se při provozu obvodu obvykle pohybujeme v okolí jistého pracovního bodu (hodnoty napětí na hradle U_G a na drainu U_D se mění jen v omezeném rozsahu). Nelineární charakteristiku pak můžeme aproximativně linearizovat. Zavádíme tak veličiny strmost, vnitřní odpor a zesilovací činitel, které však závisí na zvoleném pracovním bodě. Pracovní bod P definujme pomocí dvojice hodnot: napětí na hradle U_{G0} a na drainu U_{D0}. Proud v tomto pracovním bodě označíme I_{D0}.
Derivace převodní charakteristiky podle hradlového napětí U_G se nazývá statická strmost tranzistoru S

$$S = \left.\frac{\partial I_D}{\partial U_G}\right|_{U_D=\text{konst.}}. \tag{2.4}$$

Nejlépe ji určíme jako směrnici přímky proložené několika body v okolí pracovního bodu P. Použijeme alespoň dva body na každou stranu od pracovního bodu, tedy celkem alespoň pět bodů. Použijeme-li více bodů bude výsledek méně ovlivněn šumem v experimentálních datech, prokládaný interval je však třeba zvolit tak, aby se v něm naměřená charakteristika příliš neodchylovala od lineární závislosti. Převrácená hodnota derivace výstupní charakteristiky podle napětí na drainu je rovna vnitřnímu odporu tranzistoru R_i:

$$R_i = \left.\frac{\partial U_D}{\partial I_D}\right|_{U_G=\text{konst.}}, \tag{2.5}$$

který určíme obdobným způsobem jako strmost, tedy proložením přímky výstupní charakteristikou v okolí pracovního bodu P. Dalšími užívanými charakteristikami tranzistoru v pracovním bodě jsou zesilovací činitel tranzistoru μ:

$$\mu = \left.\frac{\partial U_D}{\partial U_G}\right|_{I_D=\text{konst.}} \tag{2.6}$$

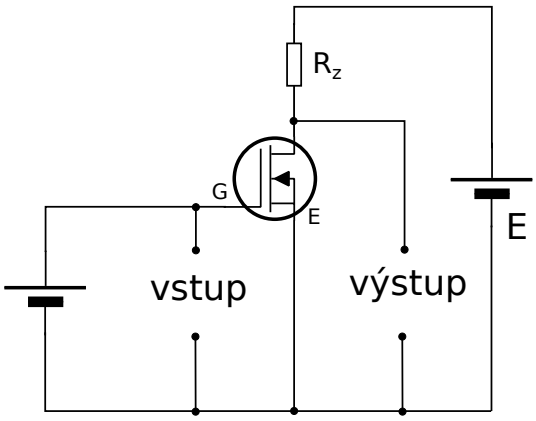
a převrácená hodnota zesilovacího činitele průnik D

$$D = \frac{1}{\mu}. \tag{2.7}$$

Takto definované veličiny splňují Barkhausenovu rovnici

$$SR_iD = SR_i\frac{1}{\mu} = 1. \tag{2.8}$$

Pokud známe dva z těchto parametrů, třetí můžeme z této rovnice vypočítat. Tento postup použijeme pro výpočet zesilovacího činitele, protože měření charakteristiky s konstatním proudem je experimentálně obtížně a tato data nemáme k dispozici.



Obrázek 2.3: Princip tranzistorového zesilovače napětí v zapojení se společným source.

Tranzistor jako zesilovač napětí

Schematické základní zapojení nejčastěji používaného napěťového zesilovače je na obrázku 2.3. Velmi důležitou součástí je zatěžovací nebo také pracovní odpor R_z. Zjednodušeně se na toto zapojení můžeme dívat jako na napěťový dělič, kdy na tranzistoru je napětí U_D a na odporu $R_z I_D$, které v součtu dávají napětí zdroje E. Zvýšením napětí na hradle vzroste proud tranzistorem, což můžeme interpretovat jako pokles odporu tranzistoru, přičemž klesne napětí na drainu a vzroste úbytek napětí na zatěžovacím odporu. Změna napětí na drainu tranzistoru je několikanásobně větší než změna napětí na hradle a dochází tak k napěťovému zesílení. Je zřejmé, že při zvýšení vstupního napětí na hradle výstupní napětí na drain poklesne. Jedná se o invertující zesilovač.
Pro kvantitativní výpočet zesílení vyjádříme ze závislosti proudu I_D na napětí U_D a na napětí hradla U_G

$$I_D = f(U_D, U_G) \tag{2.9}$$

změnu proudu jako totální diferenciál

$$\mathrm{d}I_D = \frac{\partial I_D}{\partial U_D}\mathrm{d}U_D + \frac{\partial I_D}{\partial U_G}\mathrm{d}U_G. \tag{2.10}$$

Použijeme-li definice strmosti a vnitřního odporu (2.4) a (2.5) obdržíme

$$\mathrm{d}I_D = \frac{1}{R_i}\mathrm{d}U_D + S\mathrm{d}U_G. \tag{2.11}$$

Tento výsledek můžeme interpretovat jednak tak, že změnu proudu I_D způsobí změna napětí hradla U_G a změna napětí U_D, jednak tak, že změna napětí hradla způsobí změnu proudu I_D a tato změna proudu I_D způsobí změnu napětí U_D.
V našem obvodu se zatěžovacím rezistorem R_z na obr. 2.3 platí dále pro okamžité hodnoty napětí ve výstupním obvodu II. Kirchhoffův zákon

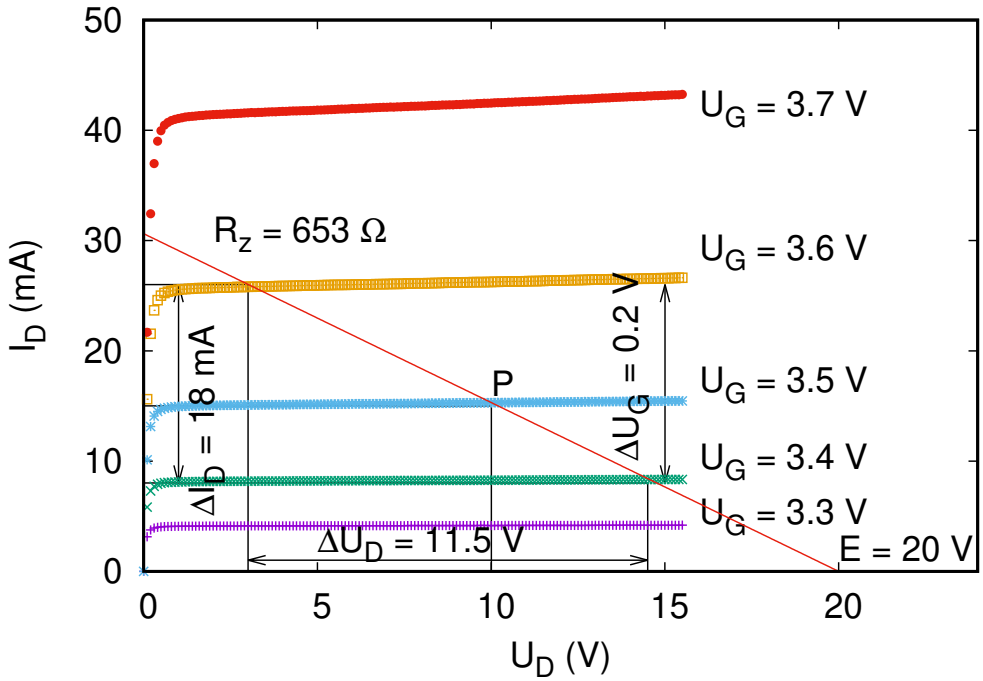
$$E - I_D R_z - U_D = 0. \tag{2.12}$$

Jeho diferencováním určíme změnu výstupního napětí způsobenou změnou proudu I_D

$$\mathrm{d}U_D = -R_z \mathrm{d}I_D, \tag{2.13}$$

kterou použijeme v (2.11) a určíme jednak dynamickou strmost S_d

$$S_d \equiv \frac{\mathrm{d}I_D}{\mathrm{d}U_G} = \frac{S}{1 + \frac{R_z}{R_i}}, \tag{2.14}$$



Obrázek 2.4: Výstupní charakteristiky tranzistoru IRF520 se zatěžovací přímkou ($R_z = 653\,\Omega$, $E = 20\,\mathrm{V}$) a pracovním bodem P ($U_{D0} = 10{,}0\,\mathrm{V}$, $I_{D0} = 15\,\mathrm{mA}$, $U_{G0} = 3{,}5\,\mathrm{V}$). Zesílení určené graficky je $A_G = \Delta U_D/\Delta U_G = (11{,}5\,\mathrm{V})/(0{,}2\,\mathrm{V}) = 57{,}5$.

jednak zesílení zesilovače A

$$A \equiv \frac{\mathrm{d}U_D}{\mathrm{d}U_G} = \frac{-\mu}{1 + \frac{R_i}{R_z}} = -S_d R_z. \tag{2.15}$$

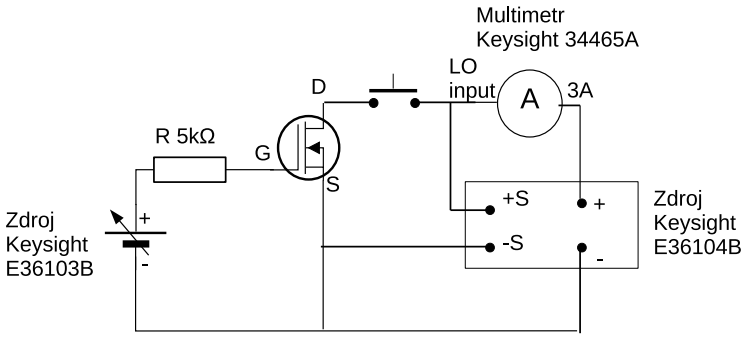
Dynamická strmost je derivace dynamické převodní charakteristiky, což je charakteristika $I_D = f(U_G)$, při které není konstantní napětí U_D, které se mění díky přítomnosti zatěžovacího odporu. Pevným parametry jsou napětí zdroje E a zatěžovací odpor R_z.
Změníme-li napětí hradla v okolí pracovního bodu o ΔU_G, změní se proud I_D o $\Delta I_D = S_d \Delta U_G$ a tato změna proudu vyvolá změnu výstupního napětí $\Delta U_D = -R_z \Delta I_D$. Poměr změny výstupního a hradlového (vstupního) napětí je napěťové zesílení tranzistorového zesilovače vyjádřené rovnicí (2.15). Dynamickou strmost S_d vypočítáme ze statické strmosti S, vnitřního odporu tranzistoru R_i a zatěžovacího odporu R_z z rovnice (2.14). Takto vypočítanou hodnotu zesílení označíme $A_V = -S_d R_z$.
Pro nastavení zesilovače do zadaného pracovního bodu (U_{D0}, U_{G0}, I_{D0}) musíme vhodně zvolit napětí zdroje E a zatěžovací odpor R_z. Zvolíme-li napětí zdroje E, vypočteme odpovídající zatěžovací odpor podle vztahu odvozeného z rovnice (2.12)

$$R_z = \frac{E - U_{D0}}{I_{D0}}, \tag{2.16}$$

a s tímto nastavením bude zesilovač pracovat v okolí již námi proměřeného pracovního bodu. Největšího napěťového zesílení dosahujeme, pokud je napětí zdroje E rovno zhruba dvojnásobku hodnoty U_{D0}.
Protože máme k dispozici změřenou sadu výstupních charakteristik tranzistoru, můžeme zesílení určit také graficky. Nejprve rovnici (2.12) přepíšeme do tvaru tzv. zatěžovací přímky

$$I_D = \frac{E - U_D}{R_z}, \tag{2.17}$$

která vyjadřuje závislost proudu protékajícího rezistorem na výstupním napětí U_D. Tento proud musí být shodný s proudem I_D tekoucím tranzistorem vyjádřeným funkcí (2.9). Zakreslíme-



Obrázek 2.5: Schéma zapojení pro měření statických charakteristik unipolárního tranzistoru.

li zatěžovací přímku do grafu výstupních charakteristik, budou průsečíky zatěžovací přímky s výstupními charakteristikami parametrizovanými hradlovým napětím U_G určovat závislost napětí na výstupu zesilovače U_D na vstupním napětí U_D v okolí pracovního bodu P, tj. U_{D0}, I_{D0}. Situace je znázorněna na obr. 2.4. Pomocí této konstrukce též ukázané na obr. 2.4 můžeme určit zesílení tranzistorového zesilovače

$$A_G = \frac{\Delta U_D}{\Delta U_G}. \tag{2.18}$$

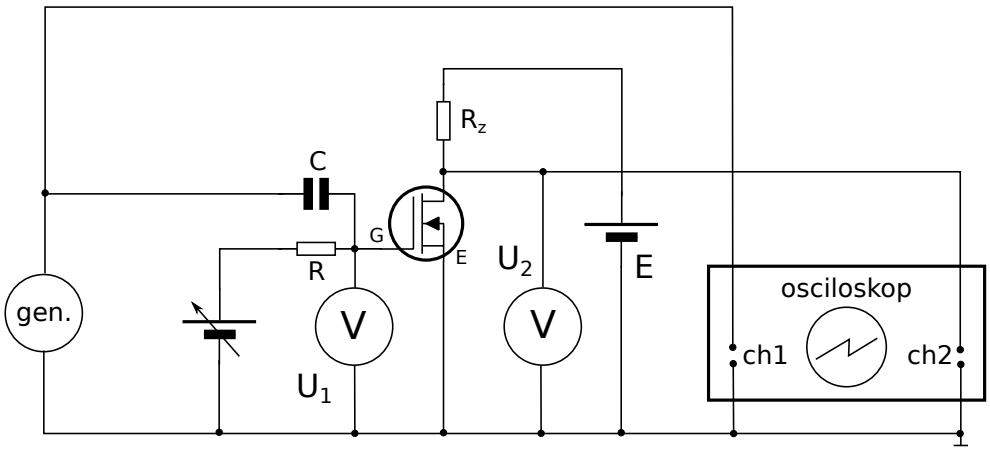
Postup měření

Měření statických charakteristik tranzistoru

Statické charakteristiky unipolárního tranzistoru měříme jednak ručně v zapojení podle obr. 2.5. V praktiku je také možné měřit charakteristiky automaticky, řídíme-li napájecí zdroje a ampérmetr přes počítač. Důležitou částí zapojení jsou snímací „sense“ kontakty $+S$ a $-S$ podle obrázku 2.5. Použitý zdroj umožňuje stabilizaci napětí nejen na výstupních zdířkách zdroje, ale v případě použití sense funkce na základě zpětné vazby v libovolném vybraném bodě obvodu. Zdroj do obvodu přivádí takové napětí, aby mezi kontakty $+S$ a $-S$ bylo napětí odpovídající nastavenému cílovému, pokud ovšem není zdroj limitován jiným způsobem (maximálním napětím zdroje nebo nastavenou hodnotou maximálního proudu). Toto je takzvané čtyřbodové zapojení a jeho výhodou je potlačení vlivu odporu přívodních vodičů či ampérmetru v obvodu.
Hodnoty veličin S, R_i, μ lze ze směrnic příslušných charakteristik, kdy měřenými body v malém okolí pracovního bodu proložíme přímku (okolí měřicího bodu volíme tak, aby daný úsek měřené závislosti byl přibližně lineární).

Měření zesílení

Funkci zesilovače můžeme sledovat nejlépe při jeho činnosti. Ke vstupním svorkám zesilovače na obr. 2.3 připojíme generátor střídavého napětí, u kterého můžeme regulovat amplitudu a frekvenci vstupního signálu. Časový průběh střídavého napětí na vstupu a na výstupu budeme sledovat dvoukanálovým osciloskopem. Protože rastr na stínítku obrazovky je kalibrován, můžeme napětí přiváděné na vstupy osciloskopu přímo měřit ve voltech. Vstupní obvod upravíme tak, abychom mohli na hradlo tranzistoru přivádět jak stejnosměrné napětí pro nastavení pracovního bodu, tak střídavé napětí z generátoru. Schéma zapojení je na obr. 2.6.
Kondenzátor C odděluje stejnosměrné napětí z regulovaného zdroje od střídavého napětí z generátoru. Rezistor R je zapojený sériově ke zdroji stejnosměrného napětí a zvyšuje jeho celkový odpor, aby nezatěžoval generátor a nesnižoval tak jeho výstupní svorkové napětí.



Obrázek 2.6: Schéma zapojení pro měření vlastností zesilovače.

Předpokládáme-li, že napětí z generátoru je harmonické s frekvencí f, resp. úhlovou frekvencí $\omega = 2\pi f$, bude na vstupu zesilovače, tj. na hradle G, napětí

$$U_1(t) = U_{G0} + u_{m1} \sin \omega t. \tag{2.19}$$

Hodnotu dvojnásobku amplitudy $2u_{m1}$ můžeme odečíst na osciloskopu jako napětí špička – špička. Pro malé amplitudy vstupního napětí u_{m1} bude mít napětí výstupu zesilovače také harmonický průběh

$$U_2(t) = U_{D0} + u_{m2} \sin(\omega t + \varphi), \tag{2.20}$$

kde $\varphi = \pi$ je fázový posuv zesilovače. Zesílení zesilovače A_M je potom podíl amlitud výstupního a vstupního napětí $A_M = u_{m2}/u_{m1}$. Zapojení zesilovače uvedené na obr. 2.6 umožňuje získat o zesilovači tyto další informace:

- závislost zesílení na poloze pracovního bodu P,
- závislost zesílení na zatěžovacím odporu R_z a napětí zdroje E,
- pozorovat zkreslení výstupního napětí zesilovačem.

Úkoly

1. Zapojíme tranzistor podle obr. 2.5 a změříme jednu statickou převodní charakteristiku a jednu výstupní charakteristiku. Parametry, pro které měříme tyto charakteristiky, zvolíme tak, aby vyučujícím zadaný pracovní bod P (zadán jako dvojice napětí U_{G0}, U_{D0}) ležel na jejich průsečíku. Tedy statickou převodní charakteristiku měříme pro konstantní hodnotu napětí na drainu U_{D0} a výstupní charakteristiku pro napětí na hradle U_{G0}.

2. Pro automatizované měření ze schématu odpojíme tlačítko a změříme soustavu pěti výstupních charakteristik a jednu převodní charakteristiku. Použijeme stejnou hodnotu napětí U_{D0} pro převodní charakteristiku. Pro výstupní charakteristiky volíme napětí na hradle v okolí hodnoty U_{G0}, přičemž jedna z nich je měřena přímo pro U_{G0}. Návod k obsluze automatického systému je v praktiku.

3. Z charakteristik určíme parametry tranzistoru ve zvoleném pracovním bodě, tj. S, R_i. Určíme je jako směrnice tečny ke grafu příslušné (převodní nebo výstupní) charakteristiky v pracovním bodě. Z Barkhausenovy rovnice (2.8) pak dopočítáme μ.

4. Zvolíme napájecí napětí zesilovače E, určíme zatěžovací odpor R_z ze vztahu (2.16).

5. Zapojíme zesilovač s generátorem a osciloskopem podle obr. 2.6 a určíme zesílení A_M. Budeme měnit amplitudu střídavého napětí generátoru a pozorovat vliv na tvar výstupního napětí.

6. Vypočítáme zesílení A_V podle (2.15) a určíme zesílení A_G graficky podle (2.18).

7. Vypočítané hodnoty zesílení A_V a A_G porovnáme s naměřenou hodnotou A_M.

Upozornění: Při měření nesmíme překročit tzv. mezní hodnoty proudu I_D, napětí U_D, napětí hradla U_G a maximální hodnotu ztrátového výkonu! Tyto hodnoty udává výrobce tranzistoru.

Užití v praxi: Tranzistory řízené polem jsou jedním ze základních prvků současné výpočetní i spotřební elektroniky. Používají se zejména v integrovaných obvodech, kde se jich vyžívá jako spínačů. Toto použití je demonstrováno zejména naměřenou převodní charakteristikou, kdy pro napětí na hradle nižší než prahové neprotéká tranzistorem proud. Další oblast jejich použití je jako elektronických zesilovačů, čemuž je úloha věnována.

Literatura k úloze 2

[1] S.M. Sze: *Physics of semiconductor devices*, John Wiley and Sons Inc., New York (1981).

[2] H. Frank, V. Šnejdar: *Principy a vlastnosti polovodičových součástek*, SNTL (1976).

[3] R.P. Feynman, R.B. Leighton, M. Sands: *Feynmanovy přednášky z fyziky s řešenými příklady 2/3*, Fragment (2006).

[4] Dokumentace k unipolárním tranzistorům v praktiku je dostupná na webu výrobce:
Tranzistor BS 170: `www.onsemi.com/products/discrete-power-modules/mosfets/bs170`
Tranzistor IRF 520: `www.vishay.com/docs/91017/irf520.pdf`
Tranzistor IRFZ 34: `www.vishay.com/docs/91290/irfz34.pdf`

Ústav fyziky kondenzovaných látek
Přírodovědecká fakulta, Masarykova univerzita, Brno

Fyzikální praktikum 2

3. Rozložení elektrického pole

Úkoly k měření

Rozložení potenciálu v okolí dvouvodičového vedení

- Pochopení a praktické zvládnutí měření rozložení elektrického pole v elektrolytické vaně pomocí střídavého mostu.
- Osvojení si schopnosti sestavení měřícího obvodu a přizpůsobení nastavení osciloskopu cílům měření.
- Porovnání měřeného elektrostatického pole v okolí dvouvodičového vedení s teoretickým výpočtem.

Rozložení potenciálu v okolí dvouvodičového vedení

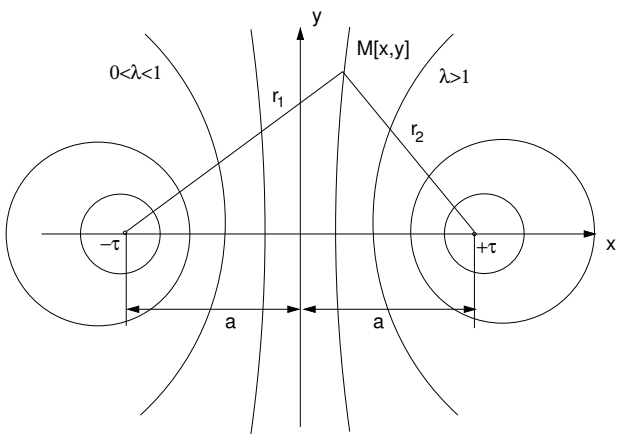
Teoretický úvod

Potenciál pole ve vzdálenosti r od přímého vodiče s lineární hustotou náboje τ je

$$V = \frac{\tau}{2\pi\epsilon} \ln \frac{R}{r}, \tag{3.1}$$

kde R je vzdálenost od vodiče, ve které klademe potenciál roven nule $V(R) = 0$ (nelze volit $V(\infty) = 0$, protože náboj je rozložen na vodiči, jehož délka není omezena). Volíme-li místo nulového potenciálu ve vzdálenosti $R = 1\,\mathrm{m}$ od vodiče, pak můžeme vztah (3.1) psát

$$V = -\frac{\tau}{2\pi\epsilon} \ln r. \tag{3.2}$$



Obrázek 3.1: Ekvipotenciální hladiny v rovině kolmé na dva rovnoběžné nekonečně dlouhé nabité vodiče.

Potenciál v bodě M (obrázek 3.1) od dvou lineárních rovnoběžných vodičů je podle principu superpozice s přihlédnutím ke vztahu (3.2) dán

$$V = V_1 + V_2 = \frac{\tau}{2\pi\epsilon} \ln \frac{r_2}{r_1}. \tag{3.3}$$

Na vodičích jsou rozloženy elektrické náboje s konstantními lineárními hustotami $+\tau$ a $-\tau$. Pro ekvipotenciály platí

$$\frac{\tau}{2\pi\epsilon} \ln \frac{r_2}{r_1} = \text{konst.}, \quad \text{nebo} \quad \frac{r_2}{r_1} = \lambda, \tag{3.4}$$

kde $r_1 = \sqrt{(a-x)^2 + y^2}$, $r_2 = \sqrt{(a+x)^2 + y^2}$ a $\lambda > 0$ je parametr ekvipotenciálních hladin. Geometrickým místem bodů v rovině, které mají od daných dvou bodů konstantní poměr vzdáleností λ, je pro $\lambda = 1$ přímka a pro $\lambda \neq 1$ Apolloniova kružnice. Ve zvolené soustavě kartézských souřadnic je touto přímkou osa y. Středy $S[x_s, 0]$ a poloměry r Apolloniových kružnic určíme tak, že rovnici (3.4) upravíme na tvar

$$\left(x - a\frac{\lambda^2+1}{\lambda^2-1}\right)^2 + y^2 = a^2 \left(\frac{\lambda^2+1}{\lambda^2-1}\right)^2 - a^2. \tag{3.5}$$

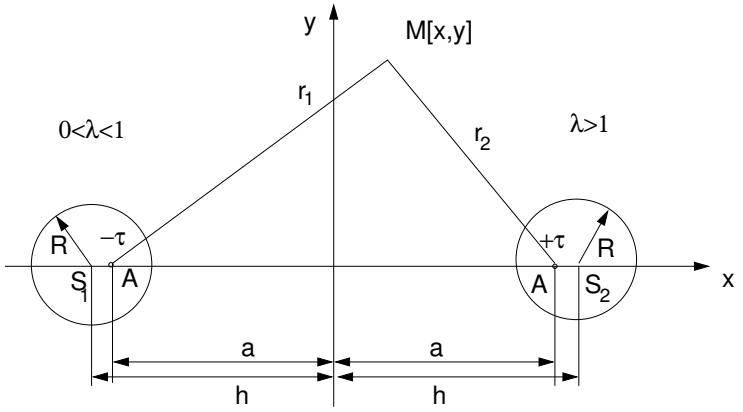
Pak

$$x_s = a\frac{\lambda^2+1}{\lambda^2-1}, \quad r = \sqrt{x_s^2 - a^2}. \tag{3.6}$$

Z prvních tří rovnic (3.21) plyne pro potenciál elektrostatického pole Laplaceova rovnice

$$\nabla^2 V = 0. \tag{3.7}$$

Problém určení elektrostatického pole dvojvodičového vedení tvořeného rovnoběžnými válcovými vodiči nahradíme řešením elektrostatického pole dvojice rovnoběžných vodičů. Okrajové podmínky zachováme, postupujeme-li takto: dané válcové vodiče nahradíme válci z dielektrika s permitivitou prostředí ϵ a do každého z nich vložíme přímkový vodič s lineární hustotou náboje τ, resp. $-\tau$ (obrázek 3.2), tzv. elektrické osy.



Obrázek 3.2: Výpočet potenciálu v bodě M od dvou válcových nekonečných vodičů s poloměrem R, mezi nimiž je rozdíl potenciálů U.

Polohu os a hodnotu τ stanovíme tak, aby elektrické pole, které vytvářejí, mělo ekvipotenciální plochy V_1 a V_2 s poloměry R právě v místech povrchu válců, přičemž musí být $V_1 - V_2 = U$. Ve zvolené souřadné soustavě je vzdálenost středů S_1 a S_2 vodivých válců $2h$, pak poloha náhradních vodičů A a B se určí z rovnice (3.6)

$$a = \sqrt{h^2 - R^2}. \tag{3.8}$$

Z poslední rovnice je zřejmé, že body A a B jsou vzájemně sdružené v kulové inverzi vzhledem ke kružnicím se středy S_1 a S_2. Pak platí

$$R^2 = h^2 - a^2 = (h-a)(h+a) = \overline{S_2A} \cdot \overline{S_2B} = \overline{S_1B} \cdot \overline{S_1A}. \tag{3.9}$$

Potenciál v bodě M bude podle (3.3)

$$V = \frac{\tau}{2\pi\epsilon} \ln \frac{r_2}{r_1} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon} \ln \lambda. \tag{3.10}$$

Pro potenciály na ekvipotenciálních plochách totožných s válcovými vodiči dostaneme podle (3.10) s použitím (3.9)

$$V_1 \equiv \frac{\tau}{2\pi\epsilon} \ln \frac{\overline{AP}}{\overline{BP}} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon} \ln \frac{h+a}{R}, \qquad V_2 \equiv \frac{\tau}{2\pi\epsilon} \ln \frac{\overline{AQ}}{\overline{BQ}} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon} \ln \frac{R}{h+a}. \tag{3.11}$$

Hodnotu τ určíme z podmínky $U = V_1 - V_2$

$$\tau = \frac{\pi\epsilon U}{\ln \frac{h+a}{R}}. \tag{3.12}$$

Dosazením (3.12) do (3.10) dostaneme

$$V = \frac{U}{2 \ln \frac{h+a}{R}} \ln \frac{r_2}{r_1}. \tag{3.13}$$

Rovnice (3.10) je odvozena pro symetrické rozložení nábojů, které v běžném experimentálním uspořádání není splněno (obyčejně máme $V_1 = U$ a $V_2 = 0$ nebo naopak a nikoliv $V_1 = U/2$ a $V_2 = -U/2$). Ve shodě s naším experimentálním uspořádáním posuneme hladinu, od které počítáme potenciál, o $U/2$, tedy

$$V = \frac{U}{2 \ln \frac{h+a}{R}} \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{U}{2}. \tag{3.14}$$

Parametr λ příslušející konkrétní ekvipotenciální hladině s potenciálem V pak vypočteme jako

$$\ln \lambda = \frac{V - \frac{U}{2}}{U} 2 \ln \frac{h+a}{R} = \left(\frac{V}{U} - \frac{1}{2}\right) 2 \ln \frac{h+a}{R}. \tag{3.15}$$

Měření rozložení elektrostatického pole

Elektrostatické pole je svou podstatou vektorovým polem, tvořeným vektorem intenzity $\boldsymbol{E}$. Můžeme je však stejně dobře popsat, užijeme-li skalárního pole hodnot elektrostatického potenciálu V. Uvedené vektorové pole intenzity a skalární pole potenciálu jsou si zcela ekvivalentní a platí

$$\boldsymbol{E} = -\nabla V. \tag{3.16}$$

Ekvipotenciální hladinou se nazývá v obecném případě plocha, na které má potenciál všude stejnou hodnotu

$$V(x, y, z) = V_0 = \text{konst.} \tag{3.17}$$

Pro každý elementární posuv $\delta x, \delta y, \delta z$ po této ploše platí zřejmě podmínky $\delta V = 0$ a tedy také

$$-(E_x \delta x + E_y \delta y + E_z \delta z) = -\boldsymbol{E} \cdot \delta \boldsymbol{l} = 0. \tag{3.18}$$

Tato rovnice říká, že skalární součin intenzity s libovolným posunem po hladině je nulový, tj. intenzita je všude kolmá k ekvipotenciálním hladinám a siločáry jimi probíhají kolmo.

Vztah (3.16) vede ryze matematickým postupem [1] k další důležité rovnici

$$\mathbf{rot}\,\boldsymbol{E} = 0, \tag{3.19}$$

tedy elektrostatické pole je pole nevírové. V místech bez náboje je také

$$\operatorname{div}\boldsymbol{E} = 0, \tag{3.20}$$

to znamená, že uvažované pole je nezřídlové.
Měření rozložení potenciálu v elektrostatickém poli je z experimentálního hlediska dosti obtížné. Využívá se proto analogie mezi elektrostatickým polem v homogenním dielektriku a elektrickým polem uvnitř homogenního vodiče, kterým protéká stacionární proud. V jednotlivých případech je pole popsáno:

$$\begin{array}{rr} \text{Pole stacionárního proudu} & \text{Elektrostatické pole} \\ \boldsymbol{E}_s = -\nabla V_s & \boldsymbol{E}_e = -\nabla V_e \\ \boldsymbol{j}_s = \sigma \boldsymbol{E}_s & \boldsymbol{D}_e = \epsilon \boldsymbol{E}_e \\ \operatorname{div}\boldsymbol{j}_s = 0 & \operatorname{div}\boldsymbol{D}_e = 0 \\ \oint \boldsymbol{E}_s \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0 & \oint \boldsymbol{E}_e \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0, \end{array} \tag{3.21}$$

kde $\boldsymbol{E}_s$, $\boldsymbol{E}_e$ je vektor intenzity pole, $\boldsymbol{j}_s$ proudová hustota, $\boldsymbol{D}_e$ vektor elektrostatické indukce, σ vodivost prostředí, ve kterém teče proud, ϵ permitivita prostředí, v němž se elektrostatické pole vyskytuje. Za předpokladu, že dielektrikum je homogenní a neexistují v něm volné náboje a vodič je homogenní ($\sigma = \text{konst.} \neq 0$), jsou soustavy rovnic (3.21) pro pole stacionárního proudu a elektrostatické pole zcela ekvivalentní. Pak lze elektrostatické pole trojrozměrného systému v prostředí s permitivitou ϵ studovat jako pole proudu $\boldsymbol{j}_s$ v prostředí s vodivostí σ. Měření obyčejně provádíme v rovině, tj. studujeme takové trojrozměrné systémy, které mohou být popsány rozložením pole v určité rovině. Jsou to jednak systémy nezávislé na jedné ze souřadných os a jednak systémy, které mají rotační symetrii. Poslední případ se týká např. elektrostatických čoček.

Střídavý můstek

Střídavý most zahrnuje čtyři impedance zapojené dle obrázku 3.3 (vlevo). Most je vyvážen tehdy, jestliže detektorem D neprochází proud, pak jsou splněny jisté relace mezi impedancemi v jednotlivých větvích mostu. V případě střídavého mostu je situace poněkud komplikovanější ve srovnání se stejnosměrným mostem, protože na impedancích dochází obecně k fázovému posuvu proudu a napětí. Napětí na jednotlivých impedancích je rovno $\hat{U}_i = \hat{Z}_i \hat{I}_i$, tedy

$$\begin{aligned} \hat{U}_1 &= \hat{Z}_1 \hat{I}_1, \qquad & \hat{U}_2 &= \hat{Z}_2 \hat{I}_2, \\ \hat{U}_3 &= \hat{Z}_3 \hat{I}_3, \qquad & \hat{U}_4 &= \hat{Z}_4 \hat{I}_4. \end{aligned} \tag{3.22}$$

Jestliže detektorem neprochází proud, je $\hat{I}_D = 0$ a platí $\hat{I}_1 = \hat{I}_2$, $\hat{I}_3 = \hat{I}_4$ a

$$\begin{aligned} \hat{U}_1 &= \hat{Z}_1 \hat{I}_1, \qquad & \hat{U}_2 &= \hat{Z}_2 \hat{I}_1, \\ \hat{U}_3 &= \hat{Z}_3 \hat{I}_3, \qquad & \hat{U}_4 &= \hat{Z}_4 \hat{I}_3, \end{aligned} \tag{3.23}$$

a současně je zřejmé, že $\hat{U}_{BD} = 0$. Tedy musí platit $\hat{U}_1 = \hat{U}_3$ a $\hat{U}_2 = \hat{U}_4$. Pak dostaneme obecnou podmínku rovnováhy na střídavém mostě

$$\frac{\hat{Z}_1}{\hat{Z}_2} = \frac{\hat{Z}_3}{\hat{Z}_4}. \tag{3.24}$$

Tato podmínka představuje vlastně dvě rovnice, pro reálnou a imaginární část impedancí $\hat{Z}_i$. Jestliže vyjádříme impedanci $\hat{Z}$ ve tvaru

$$\hat{Z} = |\hat{Z}| \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}, \tag{3.25}$$

kde $|\hat{Z}|$ je absolutní hodnota a ϕ fázový posuv, dostaneme ze vztahu (3.24) amplitudovou podmínku

$$\frac{|\hat{Z}_1|}{|\hat{Z}_2|} = \frac{|\hat{Z}_3|}{|\hat{Z}_4|} \tag{3.26}$$

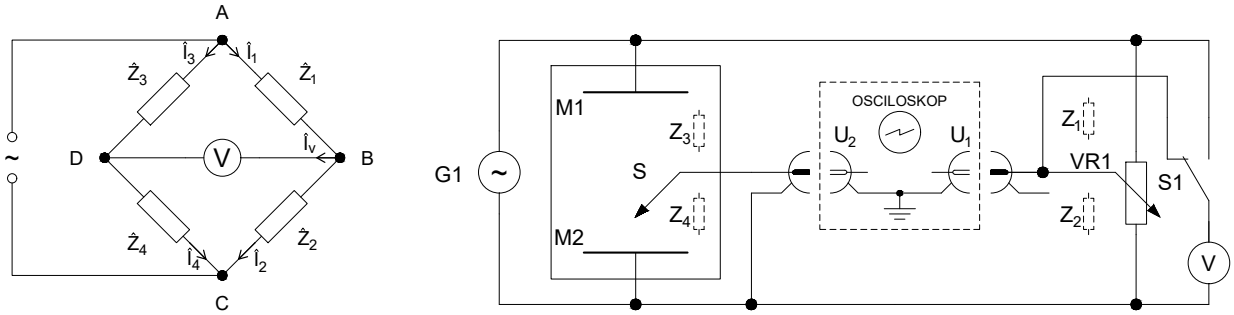
a podmínku fázovou

$$\phi_1 - \phi_2 = \phi_3 - \phi_4 + 2k\pi, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{3.27}$$

Aby byl střídavý most vyvážen, musí být obě podmínky splněny současně.

Postup měření:

Měření se provádí v elektrolytické vaně zapojené jako střídavý můstek. Je to nevodivá nádoba se slabým elektrolytem, do níž se umístí modely vodičů, jejichž elektrické pole chceme vyšetřovat. Rozměry nádoby je nutno volit tak, aby hustota proudu u jejich stěn byla mnohem menší než v prostoru, kde měříme. Na obrázku 3.3 je schéma zapojení vany do střídavého mostu se dvěma elektrodami M_1 a M_2. Oba kanály osciloskopu jsou připojeny k obvodu pomocí koaxiálních kabelů, jejichž stínící vodiče propojují zemněný vodič generátoru se zemí osciloskopu. Sondou (S) je kovová jehla sloužící k mapování potenciálu ve vaně. Sonda je připevněna k pantografu, kterým je poloha jehly přenášena do grafického tabletu a z něj do měřícího programu běžícího na PC. Dále je sonda spojena s kanálem 1 osciloskopu. Kanál 2 osciloskopu je připojen k jezdci potenciometru, pomocí něhož nastavujeme referenční potenciál. Osciloskop je pak nastaven v režimu měření rozdílu signálů na kanálech 1 a 2, tj. $U_1 - U_2$. Nastavený potenciálový rozdíl mezi zemí obvodu a jezdcem potenciometru je měřen pomocí voltmetru.
Sondou S hledáme ta místa v elektrolytu, jejichž potenciál je stejný jako potenciál U_1 nastavený na potenciometru (S_1). Je-li potenciál sondy a jezdce potenciometru stejný, pak osciloskop vykazuje minimální signál. To odpovídá přibližně rovné čáře na osciloskopu.
Pomocí odečítacího zařízení (pantografu) lze postupně přes grafický tablet přenést do ovládacího programu na PC síť bodů o stejném potenciálu. Jejich spojením dostáváme průběh ekvipotenciální čáry. Siločáry jsou v každém bodě kolmé k ekvipotenciálním čarám: takovým způsobem lze postupně zmapovat průběh elektrostatického pole v určité rovině.



Obrázek 3.3: Obecný střídavý můstek (vlevo). Zapojení střídavého můstku pro měření v elektrolytické vaně (vpravo) se zakreslenými ekvivalenty impedancí v levém obrázku (čerchovaně zakreslené značky rezistoru). Osciloskop je k obvodu připojen přes koaxiální kabely, jejichž stínící vodiče propojují zemněný vodič generátoru se zemí osciloskopu.

Měření provádíme střídavým proudem, abychom se vyhnuli možné chybě způsobené polarizací elektrod [3]. Je-li frekvence střídavého proudu 10^2 až 10^3 Hz, pracujeme v podstatě s kvazistacionárními proudy a ekvivalentnost systému rovnic (3.21) je splněna v tomto případě

[4] Signální kontakty kabeláže jak na osciloskopu tak na funkčním generátoru mají červenou barvu, kdežto stínící (uzemněné) kontakty buď modrou nebo černou barvu.

s dostatečnou přesností. Popsaná metoda je již poněkud překonaná moderními metodami, poskytuje však velmi dobrou představu o průběhu ekvipotenciálních čar v sestavené konfiguraci. Je-li napětí na elektrodách $\sim 10\,\mathrm{V}$ a detektorem lze měřit změny napětí řádově $10^{-2}\,\mathrm{V}$, určíme polohu ekvipotenciálních čar s přesností asi $1\,\%$ [2].

Úkoly

1. Určete rozložení ekvipotenciálních čar v okolí dvouvodičového vedení tvořeného rovnoběžnými válcovými vodiči.

2. Ověřte výpočtem experimentálně získané rozložení ekvipotenciálních čar. Jednak vypočtěte parametry Apolloniových kružnic λ, x_s a r (viz obr. 3.2 a (3.5), (3.6), (3.8) a (3.15)) odpovídajících jednotlivým měřeným ekvipotenciálním hladinám a uveďte je do tabulky v protokolu. Dále pak zakreslete takto určené teoretické ekvipotenciální čáry do grafu s ekvipotenciálami naměřenými.[5]

Literatura k úloze 3

[1] Z. Horák, F. Krupka: *Fyzika*, SNTL Praha (1976).

[2] J. Brož a kol.: *Základy fyzikálních měření I*, SPN Praha (1983).

[3] V. Petržílka, S. Šafrata: *Elektřina a magnetismus*, NČSAV Praha (1956).

[4] V. Votruba, Č. Muzikář: *Teorie elektromagnetického pole*, NČSAV Praha (1955).

[5] K zobrazení naměřených a vypočtených průběhů ekvipotenciálních hladin lze s výhodou použít programovacích jazyků jako Python, GNU Octave či Matlab; softwaru jako gnuplot nebo QtiPlot; on-line nástrojů typu GeoGebra či Desmos.

Ústav fyziky kondenzovaných látek
Přírodovědecká fakulta, Masarykova univerzita, Brno

Fyzikální praktikum 2

4. Brownův pohyb

Úkoly k měření

- Zaznamenat náhodný pohyb několika částic v kapalině.
- Určit míru shody experimentálně určené časové závislosti středního kvadratické posunu částic s předpovědí na základě Einsteinova zákona.
- Určit velikost částic.

Teorie

Jsou-li v kapalině rozptýleny malé částice, pak se tyto částice sráží s okolními molekulami kapaliny. Jsou-li rozměry uvažovaných částic dostatečně malé (řádově stovky nm), nemusí být v každém okamžiku kompenzovány impulzy sil, kterými molekuly kapaliny působí na tyto částice. Vlivem takto nevykompenzovaných impulzů se částice pohybuje, přičemž se v delším časovém intervalu směr pohybu náhodně mění. Tento druh pohybu se nazývá Brownův pohyb. Pohybující se částice předává při pohybu energii okolním molekulám a protože je mnohem větší než molekuly kapaliny, je možné její pohyb v kapalině popsat Stokesovým zákonem. Brownův pohyb byl prvním fyzikálním dějem, v němž se projevila existence molekul a měl tedy velký význam při experimentálním ověření molekulární kinetické teorie hmoty. Neuspořádaný pohyb brownovské částice se řídí Einsteinovým zákonem[1]: sledujeme-li polohy částice v definovaných časových okamžicích, pak střední kvadratické posunutí částice je úměrné zvoleným časovým intervalům. Ukážeme nyní odvození tohoto zákona a experimentální postup při jeho ověření.
V dalším nebudeme přímo pracovat s vektory přemístění částice, ale budeme uvažovat průměty těchto vektorů do libovolného pevného směru. Pohybová rovnice má tvar

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = F_1 + F_2 \tag{4.1}$$

kde m je hmotnost částice, F_1 je výsledná (nevykompenzovaná) síla způsobená srážkami s molekulami kapaliny a F_2 je síla způsobená odporem prostředí (okolními molekulami). Pak platí

$$F_2 = -k\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}. \tag{4.2}$$

Podle Stokesova zákona [2] je pro kulovou částici

$$k = 6\pi\eta r, \tag{4.3}$$

kde η je dynamická viskozita kapaliny, r je poloměr částice a $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ je rychlost částice. Pak lze (4.1) psát ve tvaru

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = F_1 - k\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}. \tag{4.4}$$

Vynásobením rovnice (4.4) veličinou x dostaneme:

$$mx\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = F_1x - kx\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}. \tag{4.5}$$

Jednoduše lze ukázat, že

$$x\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left(x^2\right) - \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 \tag{4.6}$$

$$x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(x^2\right). \tag{4.7}$$

Pak dosazením (4.6) a (4.7) do vztahu (4.5) dostaneme

$$\frac{m}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left(x^2\right) - m\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 = F_1x - \frac{1}{2}k\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(x^2\right). \tag{4.8}$$

Zajímáme se ovšem pouze o střední hodnoty uvedených veličin, které je možné pozorovat v časovém intervalu t. Protože je pohyb částice chaotický, pak střední hodnota součinu $F_1x = 0$. Označme dále

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\langle x^2\rangle\right) = h \tag{4.9}$$

$$-\frac{kh}{2} = \frac{m}{2}\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} - m\left\langle\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2\right\rangle. \tag{4.10}$$

Druhý člen na pravé straně rovnice (4.10) je dvojnásobek střední hodnoty kinetické energie částice. Aplikujeme-li na pohyb brownovské částice teorii ideálních plynů a zajímáme-li se o složku rychlosti částice pouze ve směru jedné osy (osy x, jeden ze tří směrů), dostaneme pak

$$\left\langle\frac{1}{2}mv^2\right\rangle = \frac{3RT}{2N_\mathrm{A}}, \quad m\left\langle\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2\right\rangle = \frac{RT}{N_\mathrm{A}}, \tag{4.11}$$

kde N_A je Avogadrovo číslo, T absolutní teplota kapaliny a R univerzální plynová konstanta. Dosazením (4.11) do vztahu (4.10) dostaneme

$$-\frac{kh}{2} = \frac{m}{2}\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} - \frac{RT}{N_\mathrm{A}}, \tag{4.12}$$

a tedy

$$\frac{\mathrm{d}h}{h - \frac{2RT}{N_\mathrm{A}k}} = -\frac{k}{m}\mathrm{d}t. \tag{4.13}$$

Integrací této rovnice dostaneme

$$\ln\left(h - \frac{2RT}{N_\mathrm{A}k}\right) - \ln C = -\frac{k}{m}t, \tag{4.14}$$

neboli po úpravě

$$h - \frac{2RT}{N_\mathrm{A}k} = C\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}, \tag{4.15}$$

kde C je integrační konstanta. Je-li časový interval t měření dosti velký, můžeme v poslední rovnici zanedbat člen $\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t} \to 0$ na pravé straně a dostáváme

$$h = \frac{2RT}{N_\mathrm{A}k}. \tag{4.16}$$

Jestliže se vrátíme k původnímu významu parametrů h a k dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\langle x^2\right\rangle = \frac{2RT}{6\pi\eta r N_\mathrm{A}}. \tag{4.17}$$

Rovnici (4.17) integrujeme za předpokladu počátečních podmínek $x = 0$, $t = 0$ a dostaneme

$$\langle x^2\rangle = \frac{2RT}{6\pi\eta r N_\mathrm{A}}t, \tag{4.18}$$

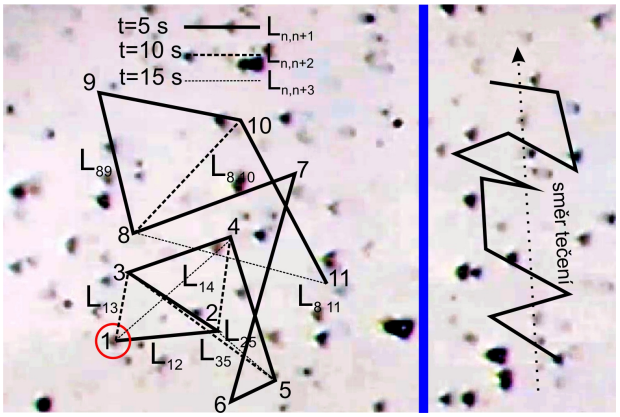
což je Einsteinův výraz pro střední kvadratické posunutí brownovské částice.

Postup měření

Pozorování popsaného jevu se zpravidla provádí na mikroskopu se značným zvětšením, jehož obraz je možné zobrazit na velkou projekční plochu. Preparát (suspenze částic ve vodě na podložním sklíčku) je umístěn na stolečku mikroskopu a na zobrazovací plochu mikroskopu je umístěna průhledná folie, na níž zaznamenáváme v pravidelných časových intervalech polohy vybrané, stále stejné, částice. Po delší době dostaneme na folii síť vzájemně propojených bodů odpovídajících chaotickému pohybu částice. Pro další zpracování měření je nezbytné znát zvětšení mikroskopu v daném uspořádání. V tomto případě se na stoleček mikroskopu místo preparátu umístí mřížka, přičemž vzdálenosti jednotlivých vrypů jsou předem známy. Čas mezi jednotlivými polohami částice stanovujeme pomocí mechanického nebo elektronického metronomu obvykle po 5 s základního intervalu (12 bpm) (*angl.* beats per minute). Můžeme k tomu využít i například aplikaci v chytrém telefonu.

Zpracování výsledků měření

Úkolem a smyslem měření je ověření platnosti Einsteinova vztahu (4.18). Je nutné si uvědomit, že vzdálenost mezi dvěma body na záznamové folii mikroskopu je zvětšené zobrazení projekce vektoru přemístění částice (za daný časový interval například 5 s) do roviny, na níž byl mikroskop zaostřen. K ověření vztahu (4.18) je nutno zjistit střední hodnotu čtverců projekcí vektorů přemístění do roviny nebo přímky. Jestliže se během měření neprojevovalo tečení preparátu jedním směrem, jsou vzdálenosti mezi jednotlivými body přímo průměty do roviny. Jestliže jsme naopak pozorovali tečení preparátu, musíme provést promítnutí všech vzdáleností do směru kolmého na směr tečení.



Obrázek 4.1: Příklad záznamu chaotického pohybu brownovské částice na průsvitném papíře přiloženém přes obraz z mikroskopu, v případě bez tečení preparátu (vlevo) a při tečení (vpravo). V záznamu pohybu částice vlevo jsou zaneseny trajektorie částice složené z vektorů posunutí při záznamu po časových intervalech $t = 5$ s (plná čára), 10 s (přerušovaná čára) a 15 s (tečkovaná čára).

Označme dále vzdálenosti zaznamenaných poloh s pořadovými čísly i a j jako $L_{i,j}$. Střední kvadratické posunutí po požadovaném časovém intervalu t získáme vypočtením aritmetického průměru čtverců naměřených vzdáleností $L_{i,i+\delta i}$. Postup odečítání vzdáleností mezi zaznamenanými polohami částice v obrazu z mikroskopu je ukázán na obr. 4.1 a výpočetní schéma pro stanovení střední hodnoty čtverců vzdáleností je uvedeno v tabulce 4.1.
Potom platí podle tabulky 4.1:

$$\langle L_5^2 \rangle = \frac{\sum_{i=1}^{10} L_{i,i+1}^2}{10}, \quad \langle L_{10}^2 \rangle = \frac{\sum_{i=1}^{9} L_{i,i+2}^2}{9}, \quad \langle L_{15}^2 \rangle = \frac{\sum_{i=1}^{8} L_{i,i+3}^2}{8}. \tag{4.19}$$

Tabulka 4.1: Čtverce vzdáleností pro částici, která byla naměřena v 11 polohách po sobě jdoucích.

po 5 s	po 10 s	po 15 s
$L^2_{1,2}$	$L^2_{1,3}$	$L^2_{1,4}$
$L^2_{2,3}$	$L^2_{2,4}$	$L^2_{2,5}$
$L^2_{3,4}$	$L^2_{3,5}$	$L^2_{3,6}$
$L^2_{4,5}$	$L^2_{4,6}$	$L^2_{4,7}$
$L^2_{5,6}$	$L^2_{5,7}$	$L^2_{5,8}$
$L^2_{6,7}$	$L^2_{6,8}$	$L^2_{6,9}$
$L^2_{7,8}$	$L^2_{7,9}$	$L^2_{7,10}$
$L^2_{8,9}$	$L^2_{8,10}$	$L^2_{8,11}$
$L^2_{9,10}$	$L^2_{9,11}$	
$L^2_{10,11}$		

Je-li Einsteinův zákon pro studovaný chaotický pohyb splněn, musí podle (4.18) pro poměry středních kvadratických posunutí platit:

$$\langle L_5^2\rangle : \langle L_{10}^2\rangle : \langle L_{15}^2\rangle = 1 : 2 : 3. \tag{4.20}$$

Poznámka: Je zřejmé, že pro ověření platnosti vztahu (4.18) je nutné odhadnout chybu středního kvadratického posunutí a také chybu v určení časových intervalů. Dále je nutné si uvědomit, že Einsteinův vztah má charakter statistické zákonitosti a k jeho ověření je třeba provést měření na velkém souboru částic, jinak jsou nejistoty určených poměrů poměrně veliké.
Odpovídá-li shoda naměřených středních hodnot kvadrátu posunutí v rámci chyby měření vztahu (4.20), lze rovnici (4.18) dále užít alespoň k odhadu velikosti částice. Ve vztahu (4.18) je $\langle x^2\rangle$ střední hodnota kvadrátu projekce vektorů přemístění do určitého směru (v našem případě jsme brali směr osy x) a nikoliv do roviny. Jestliže však na záznamové folii měříme přímo vzdálenosti L, viz obr. 4.1(vlevo), je nutné použít vztah

$$\langle L^2\rangle = 2\langle x^2\rangle, \tag{4.21}$$

který plyne ze stejné pravděpodobnosti zastoupení všech směrů v rovině. Jestliže se projevovalo tečení suspenze preparátu a byli jsme nuceni provádět před vlastním odečítáním vzdáleností promítání do přímky kolmé na směr tečení, viz obr. 4.1(vpravo), pak použijeme přímo

$$\langle L^2\rangle = \langle x^2\rangle. \tag{4.22}$$

Poznámka: Při stanovení velikosti poloměru r sledované částice ze vztahu (4.18) musíme znát skutečnou hodnotu veličiny $\langle x^2\rangle$, kterou určíme ze záznamové folie pomocí známého zvětšení mikroskopu, stanoveného za pomocí měřítka. Teplotu kapaliny T ve vztahu (4.18) musíme odhadnout, zpravidla není rovna laboratorní teplotě, protože preparát se obvykle zahřívá vlivem osvětlovacího zdroje.

Úkoly

1. Zaznamenejte pohyb alespoň pěti částic na průsvitný papír v intervalech po 5 s. Jednotlivé po sobě jdoucí polohy vzájemně spojujte lomenou čarou, podobně jako na obr. 4.1 (vlevo).

2. Na stejný průsvitný papír na obrazovce připojené k mikorskopu zaznamenejte také pomocí mřížky v Bürkerově komůrce rozteč čar o velikosti 50 μm. Z poměru velikosti obrazu a předmětu určete zvětšení mikroskopu.

3. Na průsvitném papíře pak proměřte vzdálenosti jednotlivých poloh a seřaďte do tabulky včetně kvadrátů příslušných vzdáleností, viz tab. 4.1. Zároveň zohledněte případné tečení preparátu.

4. Ověřte platnost vztahu (4.20), včetně nejistot poměrů a určete velikost poloměru částice.

Literatura k úloze 4

[1] A. Einstein, *Annalen der Physik* **324**, 371 (1906).

[2] Z. Horák, *Technická fyzika*, SNTL Praha (1961).

Ústav fyziky kondenzovaných látek
Přírodovědecká fakulta, Masarykova univerzita, Brno

Fyzikální praktikum 2

5. Magnetické pole

Úkoly k měření

- Měření horizontální složky intenzity magnetického pole Země Gaussovým magnetometrem.
- Magnetická odezva feromagnetického materiálu (hysterezní smyčka).

Geomagnetické pole

Teorie

Znalost průběhu magnetického pole v okolí Země je důležitá pro mnoho oborů, jako je například geografie, geologie a podobně. Vlastnosti magnetického pole Země popisuje intenzita magnetického pole, obvykle značená $\boldsymbol{H}$. V každém bodě můžeme vektor intenzity rozdělit na horizontální a vertikální složku, v dalším se soustředíme jen na měření horizontální složky H_z.
Princip metody měření Gaussovým magnetometrem spočívá v porovnání intenzity zemského magnetického pole s intenzitou tyčového permanentního magnetu pomocí magnetické střelky jako detektoru směru lokálního magnetického pole. Z praktických důvodů se v metodě provádí měření výchylky magnetické střelky pro dvě polohy střelky vzhledem k permanentnímu magnetu, pro tzv. první a druhou Gaussovu polohu (viz obr. 5.1).
Pro výpočet intenzity magnetického pole od tyčového magnetu použijeme vztah pro magnetické pole v okolí magnetického dipólu s dipólovým momentem $\boldsymbol{m}$

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\mu_0 r^3}\left[\frac{3(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{m})\boldsymbol{r}}{r^2} - \boldsymbol{m}\right] , \tag{5.1}$$

kde $\boldsymbol{r}$ je polohový vektor bodu v němž počítáme magnetické pole vzhledem k poloze magnetického dipólu a μ_0 je permeabilita vakua. V reálném případě se ovšem rozměry permanentního magnetu vzhledem ke vzdálenosti, ve které měříme, nedají zanedbat. Proto je třeba tento vztah integrovat přes celý magnet s danou objemovou hustotou dipólového momentu.
Integrace pro první Gaussovu polohu, tj. případ střelky na ose tyčového magnetu, vede na výsledek[6]

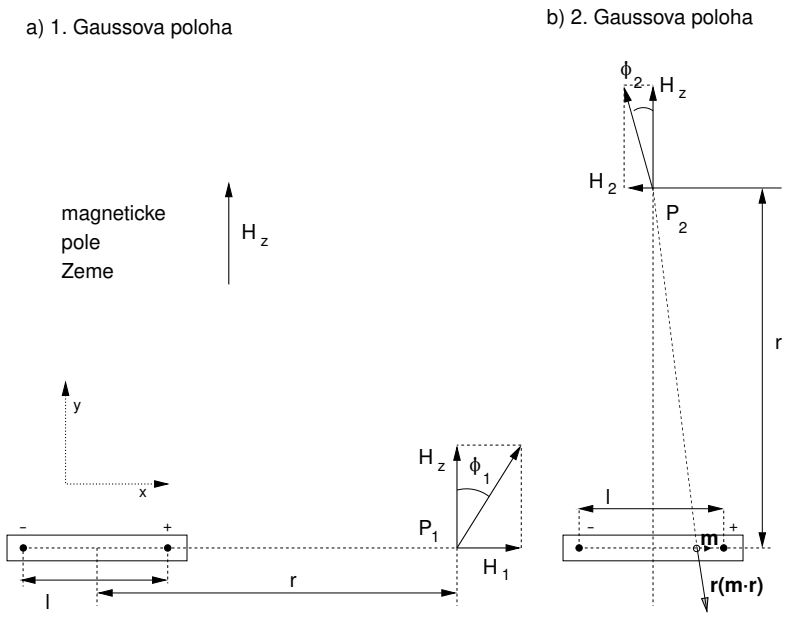
$$H_1(r) = \frac{1}{4\pi\mu_0}\int_{-l/2}^{+l/2}\mu\left[\frac{2}{(r+x)^3}\right]dx = \frac{1}{4\pi\mu_0\ r^2}\int_{1-l/2r}^{1+l/2r}\mu\left[\frac{2}{z^3}\right]dz \tag{5.2}$$

$$= \frac{\mu}{4\pi\mu_0\ r^2}\left[\frac{1}{z^2}\right]_{1+\lambda}^{1-\lambda} = \frac{\mu}{4\pi\mu_0\ r^2}\left[\frac{(1+\lambda)^2-(1-\lambda)^2}{(1-\lambda^2)^2}\right] \tag{5.3}$$

$$= \frac{1}{2\pi\mu_0\ r^3}\frac{M}{(1-\lambda^2)^2}, \tag{5.4}$$

kde $\mu = M/l$ je délková hustota magnetického momentu, $\lambda = l/2r$, r je vzdálenost mezi osou magnetické střelky a středem (těžištěm) tyčového magnetu a l je délka tyčového magnetu s celkovým magnetickým momentem M. Zde jsme aproximovali válcový tyčový magnet nekonečně

[6] Použije se substituce $z = 1 + x/r$.



Obrázek 5.1: Schéma experimentálního uspořádání. Magnetické pole v Gaussových polohách (P_1 první Gaussova poloha, P_2 druhá, a) resp. b)) v okolí permanentního tyčového magnetu a jeho skládání s magnetickým polem Země v místech magnetické střelky. Permanentní magnet je vždy orientován kolmo ke směru magnetického pole Země podél osy x. Úhlové výchylky magnetické střelky od jiho-severního směru v první a druhé poloze jsou označeny φ_1, resp. φ_2.

tenkou tyčí. Konečný průměr magnetu se v praxi projeví tím, že veličina l ve vztahu (5.4) neodpovídá jeho fyzické, ale tzv. redukované délce.
V druhé Gaussově poloze se sice směr pole vyvolaného různými elementy podél délky tyčového magnetu mění, ale vzhledem k symetrii se složka ve směru kolmém na osu magnetu vyruší. Počítat tedy budeme pouze komponentu ve směru osy tyčového magnetu (zde osa x). Příspěvek výrazu obsahující skalární součin v (5.1) k intenzitě pole ve směru osy x je $(\boldsymbol{r}\cdot d\boldsymbol{m})\boldsymbol{r}_x = x\,\mu dx\,x$. Integrací pak dospějeme ke vztahu[7]

$$
\begin{aligned}
H_2(r) &= \frac{1}{4\pi\mu_0}\int_{-l/2}^{+l/2}\mu\frac{1}{(r^2+x^2)^{3/2}}\left[\frac{3\,x^2}{(r^2+x^2)}-1\right]dx = && (5.5)\\
&= \frac{1}{4\pi\mu_0\,r^2}\left(\int_{-\lambda}^{+\lambda}\mu\left[\frac{3\,z^2}{(1+z^2)^{5/2}}\right]dz-\int_{-\lambda}^{+\lambda}\mu\left[\frac{1}{(1+z^2)^{3/2}}\right]dz\right) = && (5.6)\\
&= \frac{\mu}{4\pi\mu_0\,r^2}\left(\left[\frac{z^3}{(1+z^2)^{3/2}}\right]_{-\lambda}^{+\lambda}-\left[\frac{z}{(1+z^2)^{1/2}}\right]_{-\lambda}^{+\lambda}\right) = && (5.7)\\
&= \frac{2\mu}{4\pi\mu_0\,r^2}\frac{\lambda^3-(1+\lambda^2)\lambda}{(1+\lambda^2)^{3/2}} = -\frac{2\mu}{4\pi\mu_0\,r^2}\frac{l/2r}{(1+\lambda^2)^{3/2}} = -\frac{1}{4\pi\mu_0\,r^3}\frac{M}{(1+\lambda^2)^{3/2}} && (5.8)
\end{aligned}
$$

Známe tedy intenzitu magnetického pole v bodech P_1 a P_2. Umístíme magnet tak, aby jeho osa směřovala kolmo ke směru magnetického pole Země. Výchylka magnetky v první Gaussově poloze z jejího původního směru k magnetickému pólu Země je φ_1, přičemž platí

$$\tan\varphi_1 = \frac{H_1}{H_z} = \frac{1}{4\pi\mu_0 H_z}\frac{2M}{r^3(1-\lambda^2)^2}\ . \qquad (5.9)$$

[7] Použije se substituce $z = x/r$ a následně $\tan u = z$.

Obdobně v místě P_2 se střelka vychýlí o úhel φ_2

$$\tan\varphi_2 = \frac{H_2}{H_z} = \frac{1}{4\pi\mu_0 H_z}\frac{M}{r^3(1+\lambda^2)^{3/2}}\,. \tag{5.10}$$

Z každého z těchto vztahů lze již určit velikost magnetického pole Země, známe-li redukovanou délku magnetu l a velikost magnetického momentu M. Kombinací obou vztahů však můžeme dospět k vyjádření, kde redukovaná délka magnetu přímo nevystupuje. Umocníme-li vztah (5.9) na třetí mocninu a (5.10) na čtvrtou, dostaneme

$$\left(\frac{M}{4\pi\mu_0 H_z}\right)^3 = \frac{1}{8}r^9\tan^3\varphi_1(1-\lambda^2)^6 \tag{5.11}$$

$$\left(\frac{M}{4\pi\mu_0 H_z}\right)^4 = r^{12}\tan^4\varphi_2(1+\lambda^2)^6. \tag{5.12}$$

Vzájemným vynásobením těchto vztahů dostaneme

$$\left(\frac{M}{4\pi\mu_0 H_z}\right)^7 = \frac{1}{8}r^{21}\tan^3\varphi_1\tan^4\varphi_2(1-\lambda^4)^6. \tag{5.13}$$

Měříme-li ve vzdálenosti výrazně větší než je délka magnetu, platí $r \gg l$ a tedy i $\lambda^4 \ll 1$, pak platí

$$\frac{M}{H_z} = 4\pi\mu_0 r^3\sqrt[7]{\left(\frac{\tan\varphi_1}{2}\right)^3\tan^4\varphi_2}. \tag{5.14}$$

Na odmocninu na pravé straně se můžeme dívat jako na geometrický průměr, který můžeme nahradit aritmetickým a dostaneme tak zjednodušený vztah

$$\frac{M}{H_z} = \frac{4\pi\mu_0 r^3}{7}\left(\frac{3\tan\varphi_1}{2} + 4\tan\varphi_2\right). \tag{5.15}$$

Tento výraz se od předchozího vztahu (5.14) liší o veličinu řádu λ^4, kterou můžeme zanedbat.
Magnetický moment magnetu určíme z periody kmitů magnetu v magnetickém poli Země. Je-li osa magnetu stočena vůči magnetickému poli Země o úhel φ, pak na něj působí magnetický moment velikosti

$$MH_z\sin\varphi \approx MH_z\varphi.$$

Pohybová rovnice magnetu je pak dána vztahem

$$J\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} + MH_z\varphi + D\varphi = 0, \tag{5.16}$$

kde J je moment setrvačnosti magnetu a D je torzní moment závěsu. Používáme vlákno s velmi malým torzním momentem, který můžeme vzhledem k velikosti magnetického silového momentu zanedbat.
Magnet potom harmonicky kmitá s kruhovou frekvencí ω danou vztahem

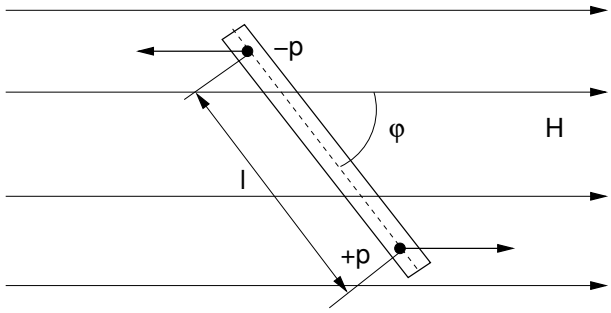
$$\omega^2 = \frac{MH_z}{J}. \tag{5.17}$$

Vyjádříme frekvenci pomocí doby kyvu magnetu $\tau = T/2$, kde T je perioda kmitů, a dostaneme

$$MH_z = \frac{\pi^2 J}{\tau^2}. \tag{5.18}$$

Moment setrvačnosti válcového magnetu je dán vztahem

$$J = \frac{m}{4}\left(R^2 + \frac{l^2}{3}\right), \tag{5.19}$$



Obrázek 5.2: Kmity permanentního magnetu v magnetickém pole Země.

kde m je hmotnost magnetu, R jeho poloměr a l délka. Pro magnet tvaru hranolu je jeho moment setrvačnosti

$$J = \frac{m}{12}\left(l^2 + b^2\right), \tag{5.20}$$

kde b je šířka magnetu a na výšce nezáleží.
Vztahy (5.15) a (5.18) nám udávají veličiny $A = M/H_z$ a $B = MH_z$. Z těchto veličin určíme velikost horizontální složky intenzity magnetického pole Země jako

$$H_z = \sqrt{\frac{B}{A}}. \tag{5.21}$$

Úkoly

1. Změřte výchylku střelky v obou Gaussových polohách magnetu pro tři různé vzdálenosti r od středu magnetu. Měření provádějte na obě strany od střelky a také pro magnet otočený o 180°. Pro každou vzdálenost spočtěte pomocnou veličinu A, ze souboru těchto hodnot získáte i její nejistotu.

2. Změřte periodu kmitů magnetu v magnetickém poli Země, rozměry a hmotnost magnetu. Nejistota veličiny B vyjde ze zákona šíření nejistot periody kmitů (ta bývá dominantní) a parametrů pro výpočet momentu setrvačnosti.

3. Určete velikost horizontální složky magnetické pole Země pomocí vztahů (5.15), (5.18) a (5.21) a porovnejte s aktuálními lokálními hodnotami z profesionálních měření[8].

Magnetická odezva feromagnetického materiálu.

Teorie

Vztah mezi magnetickou intenzitou $\boldsymbol{H}$ a magnetickou indukcí $\boldsymbol{B}$ je dán vztahem

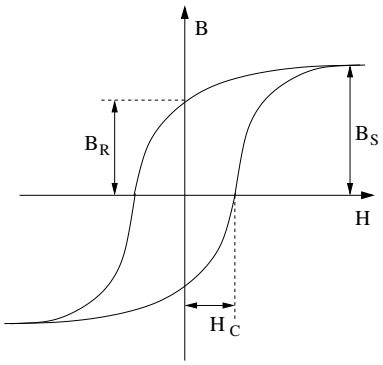
$$\boldsymbol{B} = \mu_0\left(\boldsymbol{H} + \boldsymbol{M}\right), \tag{5.22}$$

kde $\boldsymbol{M}$ je vektor magnetizace, který udává objemovou hustotu magnetického momentu. V případě paramagnetických a diamagnetických materiálů ve slabém magnetickém poli můžeme závislost magnetizace na okolním poli předpokládat v lineárním tvaru

$$\boldsymbol{M} = \chi\mu_0\boldsymbol{H}, \tag{5.23}$$

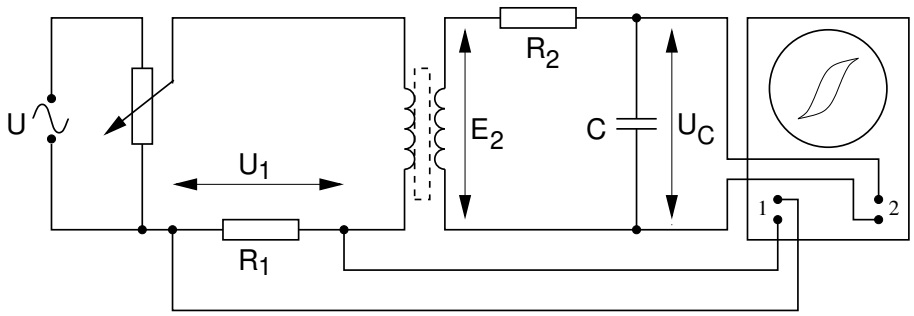
[8] Hodnoty jsou dostupné v Interaktivní osnově praktika, resp. na webu NOAA

kde χ je magnetická susceptibilita, která je kladná pro paramagnetické a záporná pro diamagnetické materiály. Pro většinu materiálů, s výjimkou přechodových kovů a jejich sloučenin, je susceptibilita velmi malá, okolo 10^{-6} až 10^{-9}. Zřejmě též platí $\boldsymbol{B} = (1+\chi)\mu_0\boldsymbol{H} = \mu_r\mu_0\boldsymbol{H}$, kde μ_r je relativní permeabilita. V obecném případě je susceptibilita tenzorem a vektory magnetizace a intenzity nemusejí mít stejný směr. Pro feromagnetické materiály však není závislost magnetické indukce na intenzitě pole lineární a vykazuje hysterezní závislost, jejíž typický průběh je znázorněn na obrázku 5.3.



Obrázek 5.3: Typický průběh magnetické hysterezní smyčky.

Základní odlišností feromagnetických materiálů od ostatních je schopnost vykazovat magnetizaci bez vnějšího magnetického pole. Magnetizace každého materiálu přitom může dosahovat pouze jisté maximální hodnoty, kdy jsou všechny přítomné magnetické momenty orientovány stejným směrem. Takováto magnetizace se nazývá nasycená (saturační) M_s a její velikost je dána přibližně součinem koncentrace atomů a magnetického momentu každého atomu. Po odstranění vnějšího magnetického pole zůstává v materiálu remanentní (zbytková) magnetizace M_R. Hysterezní křivku dále popisuje veličina zvaná koercitivní pole (koercitivní síla) H_C, která udává velikost vnějšího pole, při kterém je celková magnetická indukce v materiálu nulová. Koercitivní pole udává informaci o velikosti pole potřebného ke změně orientace magnetického pole v materiálu. Materiály dělíme podle velikosti koercitivního pole na magneticky měkké (pro H_C menší než přibližně 10^3 A/m) a magneticky tvrdé (pro H_C větší než přibližně 10^4 A/m).
Měření budeme provádět na feromagnetickém jádře se dvěma vinutími (transformátoru) buzeném střídavým elektrickým proudem zapojeném podle schématu na obrázku 5.4. Primární vinutí slouží k buzení magnetického pole a na sekundárním snímáme indukované napětí. Intenzitu magnetic-

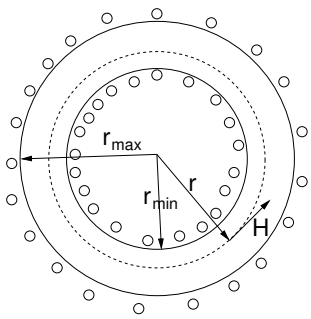


Obrázek 5.4: Schéma obvodu pro měření magnetického pole ve feromagnetu.

kého pole můžeme spočíst podle Ampérova zákona

$$\oint_L \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_S \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{n} \, \mathrm{d}S \,, \tag{5.24}$$

kde integrace na levé straně probíhá podél uzavřené křivky L, na pravé straně přes plochu S_1 jí ohraničenou a $\boldsymbol{j}$ je proudová hustota tekoucí plochou (výsledkem integrace pravé strany je zde celkový proud protékající vodiči uvnitř kružnice). V případě toroidu je řešení jednoduché, schématicky je naznačeno na obrázku 5.5. Integraci provedeme podél kružnice s poloměrem r.



Obrázek 5.5: Schéma řezu toroidní cívkou. Kroužky uvnitř a vně naznačují průběh proudových vodičů.

Z důvodu symetrie má intenzita H podél kružnice všude stejnou velikost a předchozí rovnice pak přejde do tvaru

$$2\pi r H = N_1 I \,, \quad H = \frac{N_1 I}{2\pi r} \,, \tag{5.25}$$

kde N_1 je počet závitů primárního vinutí a I proud tekoucí každým z nich. Magnetická intenzita je tedy přímo úměrná proudu, který měříme jako napětí U_1 na rezistoru R_1 připojeném do série s proudovou cívkou. Hodnota magnetické intenzity v toroidu je rovna

$$H(t) = \frac{N_1}{2\pi r R_1} U_1(t) \,. \tag{5.26}$$

Pokud je rozdíl vnitřního a vnějšího poloměru dostatečně malý, můžeme považovat hodnotu magnetické intenzity nezávislou na poloze v toroidu a za poloměr r dosadit jeho průměrnou hodnotu $r = (r_{\min} + r_{\max})/2$.
Při buzení střídavým proudem se mění s časem též magnetická indukce. Časová změna magnetické indukce B indukuje v sekundárním vinutí elektromotorické napětí E_2 podle Faradayova zákona

$$E_2(t) = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -N_2 S_2 \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} \,, \tag{5.27}$$

kde Φ je celkový magnetický tok sekundární cívkou; vycházíme z toho, že je-li průřez jádra toroidu S_2 a počet závitů sekundárního vinutí N_2, pak magnetický tok je roven $\Phi = N_2 S_2 B$. Indukované napětí je úměrné časové změně magnetické indukce. Abychom mohli měřit přímo napětí úměrné magnetické indukci, je v obvodu zařazen integrační RC člen. Průběh napětí na kondenzátoru o kapacitě C získáme z druhého Kirchhoffova zákona

$$E_2 = R I_2 + U_C, \quad U_C = \frac{Q}{C}, \quad I_2 = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} \,, \tag{5.28}$$

kde I_2 je proud tekoucí obvodem a Q je náboj na kondenzátoru. Po úpravě získáme diferenciální rovnici pro náboj Q

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} + \frac{Q}{RC} = \frac{1}{R} E_2(t). \tag{5.29}$$

Tato rovnice má řešení ve tvaru

$$Q(t) = -\frac{1}{R}\int_0^\infty E_2(t-\tau)\mathrm{e}^{-\frac{\tau}{RC}}\mathrm{d}\tau\ . \tag{5.30}$$

Průběh napětí na kondenzátoru je potom dán vztahem

$$U_C(t) = -\frac{1}{RC}\int_0^\infty E_2(t-\tau)\mathrm{e}^{-\frac{\tau}{RC}}\ \mathrm{d}\tau. \tag{5.31}$$

Je-li časová konstanta integračního obvodu RC mnohem větší než perioda budícího střídavého proudu, lze exponenciální člen v integrálu položit přibližně roven 1. Potom po dosazení z rovnice (5.27) do vztahu (5.31) dostaneme výraz pro napětí U_C

$$U_C(t) \approx \frac{1}{RC}\int_{-\infty}^t N_2S_2\left.\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}\right|_\tau \mathrm{d}\tau\ , \quad U_C(t) \approx \frac{N_2S_2}{RC}B(t). \tag{5.32}$$

Po převedení dostaneme vztah pro magnetickou indukci

$$B(t) = \frac{RC}{N_2S_2}U_C(t). \tag{5.33}$$

V zapojení podle schématu na obrázku 5.4 nastavíme osciloskop do tzv. X-Y režimu, kdy zobrazujeme vzájemnou závislost napětí na jednotlivých vstupech. Jelikož podle vztahu (5.26) je napětí na prvním vstupu úměrné intenzitě magnetického pole a napětí na druhém vstupu je podle vztahu (5.33) úměrné indukci magnetického pole, zobrazujeme přímo hysterezní smyčku, tedy závislost indukce na intenzitě magnetického pole. Napětí naměřená na osciloskopu pak již převedeme na indukci a intenzitu magnetického pole ve zvolených bodech hysterezní smyčky pomocí výše zmíněných vztahů (5.26) a (5.33).
Přesné odečítání hodnot (pomocí kurzoru) není v X-Y režimu možné; řešením je stažení naměřených dat přes USB port osciloskopu, nebo odečítání hodnot při zobrazení časového průběhu. Pro koercitivitu a remanenci nás zajímají hodnoty v jednom kanále, kdy druhý zobrazený kanál pochází 0. Pokuste se projitím většího počtu period získat více (kladných i záporných) hodnot; získáte tak přesnější výsledek[9] *a volitelně určíte i jeho nejistotu.*
Magnetizaci můžeme snadno spočíst z magnetické indukce s použitím vztahu (5.22) jako

$$M = \frac{B}{\mu_0} - H. \tag{5.34}$$

Úkoly

1. Zapojte obvod podle schématu.
2. Z osciloskopu odečtěte napětí odpovídající koercitivnímu poli, remanentní a saturační magnetizaci.
3. Změřte rozměry jádra transformátoru.
4. Určete velikost koercitivního pole, saturační a remanentní magnetizace pro zadaný materiál podle vztahů (5.26) a (5.33). U saturace uveďte i hodnotu intenzity H_s, při které byla dosažena.

Užití v praxi: Měření magnetického pole má význačné praktické aplikace. Lokální magnetické pole Země je ovlivněno také geologickými poměry a jeho měření se využívá při geofyzikálním průzkumu např. pohybu litosférických desek.

[9] Krok digitalizace osciloskopu bývá dost velký, jedno měření je platné max. na 2 cifry.

Feromagnetické materiály mají také mnoho praktických fyzikálních a elektrotechnických aplikací, kdy je podstatná znalost jejich hysterezní křivky. Magneticky tvrdé materiály se používají jako permanentní magnety, zatímco magneticky měkké materiály se používají při aplikacích vyžadujících snadnou změnu magnetizace, jako jsou elektromagnety nebo transformátory. Magneticky měkké materiály se používají rovněž k odstínění vnějšího magnetického pole. Obzvláště důležité je stínění v elektronových mikroskopech, kde by parazitní vnější magnetické pole ovlivňovalo elektronovou optiku mikroskopu.

Literatura k úloze 5

[1] R.P. Feynman, R.B. Leighton, M. Sands: *Feynmanovy přednášky z fyziky s řešenými příklady 2/3*, Fragment (2006).

[2] J. Perry, Proc. Phys. Soc. London **13**, 227 (1894).

[3] J.D. Jackson, *Classical electrodynamics*, John Wiley & Sons, Inc. (1998), kap. 5.

Ústav fyziky kondenzovaných látek
Přírodovědecká fakulta, Masarykova univerzita, Brno

Fyzikální praktikum 2

6. Elektromagnetické kmity v RLC obvodu

Cíle měření

1. Určit impedanci několika součástek (odpor, kondenzátor, cívka).
2. Změřit frekvenční charakteristiku buzeného RLC obvodu a určit z nich odpor, indukci a kapacitu RLC obvodu.
3. Změřit přechodový jev (vlastní kmity) RLC obvodu s podkritickým, kritickým a nadkritickým tlumením, a určit vlastní frekvenci obvodu a koeficient útlumu.

Teorie obvodů s R, L a C součástkami

RLC obvod sestává z odporu s velikostí R, cívky s indukčností L a kondenzátoru s kapacitou C řazených buď do série nebo paralelně. V těchto obvodech dochází při buzení zdrojem střídavého napětí na určité frekvenci k rezonanci charakterizované maximem proudu. Podobné rezonanční chování můžeme vidět v mnoha oblastech fyziky např. v situaci, kdy je závaží přichycené pružinou buzené periodickou silou. Obvody s R, L a C mají široké uplatnění např. jako rezonátory, filtry s horní a dolní propustí anebo integrační členy (viz úloha č. 5).
Uvažujme obvod, kde jsou prvky R, L a C řazené v sérii, viz obr. 6.1, a jsou buzeny napětím z funkčního generátoru $U(t)$. Druhý Kirchhoffův zákon říká, že součet úbytků napětí na spotřebičích se v uzavřeném obvodě rovná součtu napětí na zdrojích. V případě tohoto obvodu tedy nabývá tvar

$$U_R(t) + U_L(t) + U_C(t) = U(t) \ , \tag{6.1}$$

kde $U_R(t)$, $U_L(t)$ a $U_C(t)$ jsou napětí na odporu, cívce a na kondenzátoru. Podle Ohmova zákona je napětí na odporu

$$U_R(t) = RI(t) \ . \tag{6.2}$$

Faradayův zákon dává napětí pro cívku

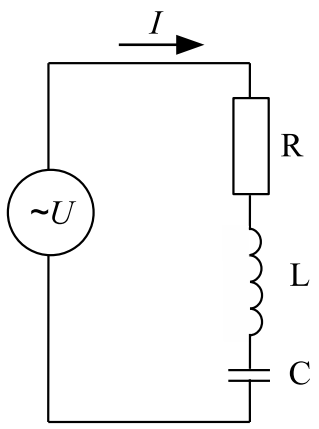
$$U_L(t) = L\frac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t} \tag{6.3}$$

a z Coulombova zákona lze odvodit, že napětí na kondenzátoru nabíjeném proudem $I(t)$ za čas t je

$$U_C(t) = U(0) + \frac{1}{C}\int_0^t I(t)\mathrm{d}t \ , \tag{6.4}$$

kde $U(0)$ je napětí v čase $t = 0$. Dosazením těchto napětí do rovnice (6.1) a jejím zderivováním podle času dostáváme rovnici

$$L\frac{\mathrm{d}^2I(t)}{\mathrm{d}t^2} + R\frac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C}I(t) = \frac{\mathrm{d}U(t)}{\mathrm{d}t} \ . \tag{6.5}$$



Obrázek 6.1: Schéma sériového RLC obvodu napájeného zdrojem střídavého napětí $U(t)$.

Rozeberme ustálené řešení tohoto obvodu při buzení střídavým napětím, kdy je zapojen postupně pouze člen R nebo L nebo C, a nakonec celý obvod RLC. Předpokládejme nyní, že střídavé napětí $U(t)$ má tvar harmonické funkce a můžeme ji vyjádřit jako reálnou část komplexní funkce

$$\hat{U}(t) = \hat{U}_0(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \ , \tag{6.6}$$

kde stříškou označujeme komplexní funkci. Využíváme zde matematický aparát komplexních čísel[10], kdy amplituda napětí $\hat{U}_0(\omega)$ je komplexní, tzn. můžeme ji vyjádřit jako $\hat{U}_0(\omega) = |\hat{U}_0(\omega)|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_U(\omega)}$. Veličina φ_U zde vyjadřuje fázi napětí. Můžeme očekávat, že i proud má stejný tvar

$$\hat{I}(t) = \hat{I}_0(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \ . \tag{6.7}$$

Analogicky $\hat{I}_0(\omega) = |\hat{I}_0(\omega)|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_I(\omega)}$. Připomeňme, že tento aparát komplexních čísel můžeme použít, protože zacházíme s lineárními veličinami a operátory, u kterých se v libovolném bodě můžeme vrátit k reálným veličinám vyjádřením jejich reálné části, např. $U(t) = \mathrm{Re}\,[\hat{U}(t)]$ pomocí Eulerovy rovnice $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = \cos x + \mathrm{i}\sin x$. Reálné části veličin musíme používat, pokud pracujeme s nelineární veličinami, např. s výkonem $P \propto I(t)^2$.

Obvod s odporem

Nejjednodušší případ nastává, pokud je zapojen pouze odpor. Pak na levé straně rovnice (6.5) zůstane pouze druhý člen. Po dosazení rovnic (6.6) a (6.7) do (6.5) dostáváme

$$R\hat{I}_0(\omega) = \hat{U}_0(\omega) \ , \tag{6.8}$$

která vyjadřuje Ohmův zákon pro amplitudy $\hat{I}_0(\omega)$ a $\hat{U}_0(\omega)$. V obvodech střídavého proudu se často používá komplexní impedance $\hat{Z}(\omega) = |\hat{Z}(\omega)|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_Z(\omega)}$ definovaná jako

$$\hat{Z}(\omega) \equiv \frac{\hat{U}_0(\omega)}{\hat{I}_0(\omega)} = \frac{|\hat{U}_0(\omega)|}{|\hat{I}_0(\omega)|}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi_U - \varphi_I)} \ . \tag{6.9}$$

Rozdíl $\varphi_U(\omega) - \varphi_I(\omega)$ vyjadřuje fázový rozdíl mezi proudem a napětím. Typicky volíme $\varphi_U = 0$ (volba počátku času). V případě odporu pak dostáváme pro jeho impedanci

$$\hat{Z}_R(\omega) = R = R_R \ . \tag{6.10}$$

kde jsme pro velikost odporu měřeného rezistoru zavedli veličinu R_R z důvodu odlišení od ostatních odporů, které se v obvodu mohou vyskytnout. Jelikož je tato impedance reálná, vidíme, že pro fázi impedance odporu platí $\varphi_R = \varphi_U - \varphi_I = 0$.

[10] Pro podrobnější diskuzi aparátu komplexních čísel velmi doporučujeme pročíst [1].

Obvod s kondenzátorem

V případě, kdy je v obvodu jen kondenzátor, zůstane na levé straně rovnice (6.5) pouze třetí člen. Analogicky s předchozí částí pak dostáváme pro impedanci kapacity

$$\hat{Z}_C(\omega) = \frac{1}{\mathrm{i}\omega C} = \frac{1}{\omega C}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} \ . \tag{6.11}$$

Zde je již impedance komplexní. Fáze napětí na kondenzátoru $\hat{U}_0(\omega) = \hat{Z}_C(\omega)\hat{I}_0(\omega)$ se liší o $-\pi/2 = -90°$ relativně k proudu, tzn. že harmonický profil napětí se „opožďuje“ za proudem. Ze změřené velikosti impedance $|\hat{Z}_C(f)|$ na dané frekvenci $f = \omega/2\pi$ je možno vypočíst kapacitu jako

$$C = \frac{1}{2\pi f|\hat{Z}_C(f)|} \ . \tag{6.12}$$

Tento případ představuje ideální kondenzátor. V reálných součástkách existují ztráty, které si můžeme představit jako přídavný odpor zapojený do série, tzv. ekvivalentní sériový odpor (v angličtině se používá zkratka „ESR“). S impedancemi můžeme pracovat podobně jako s odpory v obvodu se stejnosměrným proudem, tzn., v sériovém zapojení je celková impedance dána součtem impedancí jednotlivých elementů a tedy impedanci reálného kondenzátoru je možno vyjádřit jako

$$\hat{Z}_C^r(\omega) = \hat{Z}_C(\omega) + R_C = \frac{-\mathrm{i}}{\omega C} + R_C \ . \tag{6.13}$$

Odtud vyjádříme fázi impedance kondenzátoru φ_C jako

$$\tan\varphi_C = \frac{\mathrm{Im}\,\hat{Z}_C^r(\omega)}{\mathrm{Re}\,\hat{Z}_C^r(\omega)} = \frac{-1}{\omega R_C C} \ . \tag{6.14}$$

Odpor tedy způsobí, že fáze již má větší hodnotu než $-90°$. Pro $\omega \to 0$ se blíží ideální hodnotě $-90°$, pro $\omega \to \infty$ se fáze blíží 0, tzn., kondenzátor se chová jako odpor. Z amplitudy a fáze $\hat{Z}_C^r(\omega)$ lze vyjádřit pomocí rovnice (6.13) kapacitu

$$C = \frac{-1}{2\pi f|\hat{Z}_C^r(f)|\sin\varphi_C} \ , \tag{6.15}$$

(záporné znaménko zde vystupuje protože fázový úhel kondenzátoru φ_C je záporný) a ekvivalentní sériový odpor

$$R_C = |\hat{Z}_C^r(f)|\cos\varphi_C \ . \tag{6.16}$$

Jako míra kvality kondenzátoru na určité frekvenci se zavádí bezrozměrná veličina činitel jakosti Q (v angl. Q-factor, Q z angl. quality), který je daný velikostí poměru imaginární a reálné části $\hat{Z}_C^r(\omega)$, $Q(\omega) = 1/(\omega C R_C)$. Jeho převrácená hodnota $D = 1/Q = \omega C R_C$ (z angl. dissipation) se nazývá ztrátový činitel, je dána podílem odporové a kapacitní složky a vyjadřuje míru ztráty energie. Nejmenší ztrátový činitel mají kondenzátory vzduchové (řádově 10^{-5} až 10^{-6}) na 1 kHz. Keramické kondenzátory mají ztrátový činitel řádově 10^{-4}, kondenzátory s plastovou fólií 10^{-3} a kondenzátory papírové 10^{-2}. Ztrátový činitel elektrolytických kondenzátorů bývá 0,1 až 0,3 [2, 3]. Poznamenejme, že v reálném kondenzátoru je sériový ekvivalentní odpor frekvenčně závislý a je nutno ho charakterizovat v blízkosti frekvence, na kterém pak s kondenzátorem pracujeme.

Obvod s cívkou

V případě, kdy v obvodu je pouze cívka, pak na levé straně rovnice (6.5) zůstane pouze první člen. Analogicky s předchozí částí pak dostáváme pro impedanci cívky

$$\hat{Z}_L(\omega) = \mathrm{i}\omega L = \omega L\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} \ . \tag{6.17}$$

Impedance je zde opět komplexní a její fáze $\pi/2$ značí, že fáze napětí na kondenzátoru $\hat{U}_0(\omega) = \hat{Z}_L\hat{I}_0(\omega)$ je o $\pi/2$ větší než u proudu, tzn., napětí se na cívce „předbíhá“ před proudem o 90°. Ze změřené velikosti impedance $|\hat{Z}_L(f)|$ na dané frekvenci f je možno vypočíst indukčnost jako

$$L = \frac{|\hat{Z}_L(f)|}{2\pi f} \,. \tag{6.18}$$

Reálnou cívku si můžeme opět představit jako ideální cívku zapojenou v sérii s ekvivalentním sériovým odporem a její impedance je

$$\hat{Z}_L^r = \hat{Z}_L(\omega) + R_L = \mathrm{i}\omega L + R_L \,. \tag{6.19}$$

Odtud vyjádříme úhel této impedance jako

$$\tan\varphi_L = \frac{\omega L}{R_L} \,. \tag{6.20}$$

Z amplitudy a fáze $\hat{Z}_L^r(\omega)$ (6.19) lze vyjádřit indukci

$$L = \frac{|\hat{Z}_L^r(f)|\sin\varphi_L}{2\pi f} \,, \tag{6.21}$$

a ekvivalentní sériový odpor

$$R_L = |\hat{Z}_L^r(f)|\cos\varphi_L \,. \tag{6.22}$$

Ekvivalentní sériový odpor způsobí, že fáze již má menší hodnotu než 90°. Pro $\omega \to \infty$ se blíží ideální hodnotě +90°, pro $\omega \to 0$ se fáze blíží 0, tzn., cívka se chová jako odpor. Jako míra kvality cívky na určité frekvenci se opět vyjadřuje pomocí činitele jakosti (velikosti poměru imaginární a reálné části impedance), $Q(\omega) = \omega L/R_L$ a ztrátový činitel je $D = 1/Q = R_L/(\omega L)$. Jen krátce zmiňme, že sériový odpor není jedinou charakteristikou reálné cívky. Na vysokých frekvencích se začne projevovat paralelní kapacita vznikající mezi jednotlivými smyčkami cívky. Proto se v tomto praktiku omezíme na relativně malé frekvence pod 3 kHz, kde je tento efekt relativně slabý – projevuje se tak, že ekvivalentní sériový odpor není konstanta, ale závisí na frekvenci. Na dostatečně nízkých frekvencích by se hodnota R_L měla blížit stejnosměrnému odporu cívky.
Obrázek 6.2 shrnuje dosažené výsledky a souhrnně ukazuje (komplexní) impedance reálné cívky ($\hat{Z}_L^r$), odporu ($\hat{Z}_R$) a reálné kapacity ($\hat{Z}_C^r$), kde každá z nich má hodnotu reálné části rovnu R.

RLC obvod

Pro vyřešení RLC obvodu nejprve podělme rovnici (6.5) indukčností L a obdržíme

$$\frac{\mathrm{d}^2 I(t)}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{LC}I(t) = \frac{1}{L}\frac{\mathrm{d}U(t)}{\mathrm{d}t} \,. \tag{6.23}$$

Tato rovnice je analogická pohybové rovnici tlumeného mechanického oscilátoru. Člen s první derivací proudu představuje disipaci energie a je úměrný konstantě tlumení α, kde

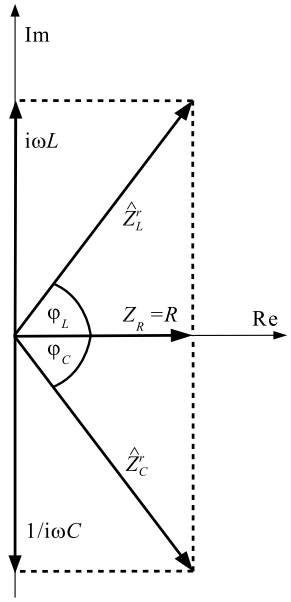
$$2\alpha = \frac{R}{L} \,. \tag{6.24}$$

Konstanta u třetího členu zleva určuje kruhovou rezonanční frekvenci oscilátoru

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \,. \tag{6.25}$$

Připomínáme, že jednotka ω (stejně jako jednotka α) je rad/s a ω se pojí s frekvencí f (jednotka Hz) jako $\omega = 2\pi f$. Pro rezonanční frekvenci tedy dostáváme

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \,. \tag{6.26}$$



Obrázek 6.2: Impedance odporu $\hat{Z}_R$, reálné cívky $\hat{Z}_L^r$, a reálného kondenzátoru $\hat{Z}_C^r$ zobrazené v rovině komplexních čísel. Reálná část všech impedancí má hodnotu R.

Rovnici (6.23) pomocí zavedených konstant můžeme přepsat na

$$\frac{\mathrm{d}^2 I(t)}{\mathrm{d}t^2} + 2\alpha \frac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 I(t) = \frac{1}{L}\frac{\mathrm{d}U(t)}{\mathrm{d}t} \ . \tag{6.27}$$

Jedná se o nehomogenní diferenciální rovnici druhého řádu pro proud $I(t)$.

Ustálené řešení

Rozeberme nejprve, podobně jako výše, ustálené řešení při buzení střídavým napětím o úhlové frekvenci ω. Vyjádřeme závislost proudu obvodem relativně k budícímu napětí pomocí veličiny $\hat{G}(\omega) \equiv \hat{I}_0(\omega)/\hat{U}_0(\omega)$, která se nazývá vodivost. Vodivost je převrácenou hodnotou impedance, $\hat{G}(\omega) = 1/\hat{Z}(\omega)$ a má jednotku Siemens (zn. S) nebo Ω^{-1}. Po dosazení rovnic (6.6) a (6.7) do (6.27) dostáváme pro vodivost

$$\hat{G}(\omega) \equiv \frac{\hat{I}_0(\omega)}{\hat{U}_0(\omega)} = \mathrm{i}\omega \frac{F}{\omega_0^2 - \omega^2 + \mathrm{i}2\alpha\omega} \ , \tag{6.28}$$

kde

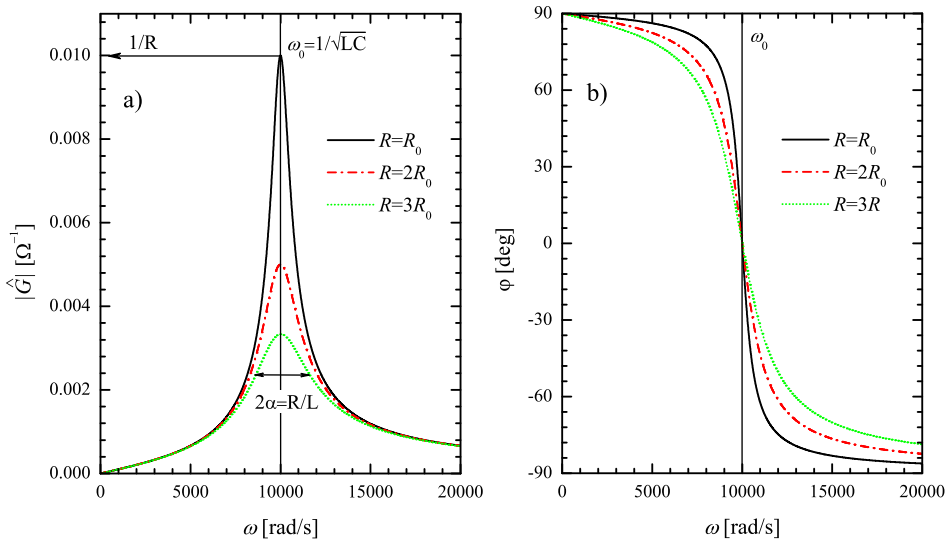
$$F = 1/L \tag{6.29}$$

je oscilátorová síla. Člen $F/(\omega_0^2 - \omega^2 + \mathrm{i}\omega 2\alpha)$ je rezonanční a setkáme se s ním v mnoha fyzikálních situacích, např. při řešení mechanického oscilátoru nebo při kmitech iontů v pevných látkách (tzv. Lorentzův oscilátor). Člen $\mathrm{i}\omega$ zde vystupuje[11], protože vztah (6.28) představuje závislost proudu na napětí[12].
Vztah (6.28) můžeme alternativně vyjádřit pomocí původních veličin R, L a C jako

$$\hat{G}(\omega) = \frac{1}{R + \mathrm{i}(\omega L - \frac{1}{\omega C})} \ . \tag{6.30}$$

[11] Znaménko u tohoto členu závisí na zvoleném znaménku u času ve vztazích (6.6) a (6.7). V návodu k této úloze používáme znaménko směru času stejně jako je zvykem v elektrotechnice. Na druhou stranu, v kvantové teorii či teorii pevných látek se používá časová závislost $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$, která by změnila znaménko u všech členů $\mathrm{i}\omega$.

[12] Amplituda náboje na kondenzátoru $\hat{q}_0$ člen $\mathrm{i}\omega$ nemá, viz rovnice (6.35) v části věnované přechodovému jevu a dále viz [1].



Obrázek 6.3: Amplituda vodivosti (a) a její fáze (b) sériového obvodu RLC pro hodnoty $L = 0{,}1$ H, $C = 100$ nF. Jsou zde vyneseny tři křivky pro hodnoty odporu $R = R_0$, $R = 2R_0$ a $R = 3R_0$, kde $R_0 = 100\ \Omega$. Rezonanční frekvence $\omega_0 = 10\,000$ rad/s. Plná šířka rezonančních křivek v úrovni $1/\sqrt{2} \approx 71\,\%$ maxima je rovna 2α, což je ilustrováno šipkou v případě $R = 3R_0$ ($2\alpha = 3000$ rad/s.)

Pravou stranu tohoto výrazu můžeme také jednoduše obdržet jako převrácenou hodnotu RLC impedancí v sérii $1/(\hat{Z}_R + \hat{Z}_L + \hat{Z}_C)$.
Amplitudu vodivosti vyjádříme jako

$$\left|\hat{G}(\omega)\right| = \sqrt{\hat{G}(\omega)\hat{G}^*(\omega)} = \omega \frac{F}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\alpha\omega)^2}} = \frac{1}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} \,. \tag{6.31}$$

Fázi vodivosti $\varphi_G(\omega)$ vyjádříme jako

$$\tan \varphi_G(\omega) = \frac{\operatorname{Im} \hat{G}(\omega)}{\operatorname{Re} \hat{G}(\omega)} = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\alpha\omega} = \frac{\frac{1}{\omega C} - \omega L}{R} \,. \tag{6.32}$$

Obrázek 6.3(a) vykresluje závislost amplitudy vodivosti RLC obvodu na kruhové frekvenci ω pro hodnoty $L = 0{,}1$ H, $C = 100$ nF a tři hodnoty odporu $R = R_0$, $R = 2R_0$ a $R = 3R_0$, kde $R_0 = 100\ \Omega$. Na rezonanční frekvenci je amplituda rovna $1/R$ a tedy rovnice (6.31) má na této frekvenci tvar stejnosměrného Ohmova zákona. Z amplitudy vodivosti v rezonanci tedy můžeme určit R. V reálném RLC obvodu tento odpor odpovídá ztrátám v celém obvodu daným součtem ekvivalentních sériových odporů všech součástek na dané frekvenci

$$R_{\text{celek}} = R_R + R_L + R_C \,, \tag{6.33}$$

kde R_R je velikost přidaného odporu v obvodu. Šířka rezonance $|\hat{G}(\omega)|$ je pro slabé tlumení úměrná α, přesněji řečeno, šířka $|\hat{G}(\omega)|$ ve výšce $1/\sqrt{2} \approx 71$ % maxima je rovna 2α a je možno z ní určit L při znalosti R.[13]. Z frekvence rezonance pak pomocí vztahu (6.25) určíme C a RLC obvod je tak plně charakterizován.
Obrázek 6.3(b) vykresluje frekvenční závislost fáze vodivosti stejného RLC obvodu. Na rezonanční frekvenci $\omega = \omega_0$ je fáze nulová. V limitě $\omega \to 0$ fáze nabývá hodnoty $+90°$ a v limitě $\omega \to \infty$ nabývá $-90°$. Tedy celková změna fáze při průchodu rezonanční frekvencí je $180°$.

[13] V elektrotechnice se často uvažuje o výkonu, který je úměrný kvadrátu proudu a tedy G^2. Pro G^2 je pak šířka 2α v polovině výšky maxima, tzv. FWHM (z angl. full width at half maximum).

Přechodový jev

Přechodový jev v RLC obvodu vzniká při skokové změně budícího napětí, např. při vypnutí zdroje. Vyjádřeme přechodový jev napětí na kondenzátoru $U_C(t)$, což bude v tomto praktiku přímo měřená veličina. Vraťme se k rovnici (6.1), do které dosadíme vztahy (6.2), (6.3). S uvážením definice proudu $I(t) = \mathrm{d}q(t)/\mathrm{d}t$, kde $q(t)$ je náboj na kondenzátoru, a vztahu $q(t) = U_C(t)C$ dostáváme rovnici

$$\frac{\mathrm{d}^2U_C(t)}{\mathrm{d}t^2} + 2\alpha\frac{\mathrm{d}U_C(t)}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2U_C(t) = \omega_0^2U(t)\ , \tag{6.34}$$

kde jsme použili výše zavedených konstant α a ω_0. Tato rovnice je formálně podobná rovnici (6.27), ale vystupuje zde napětí na kondenzátoru $U_C(t)$ a pravá strana je úměrná budícímu napětí $U(t)$, kdežto v rovnici (6.27) její derivaci. Pro úplnost zmiňme, že při harmonickém buzení (6.6) je řešení této rovnice

$$\frac{\hat{U}_{C0}(\omega)}{\hat{U}_0(\omega)} = \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + \mathrm{i}2\alpha\omega}\ . \tag{6.35}$$

Tento vztah a tedy napětí na kondenzátoru (potažmo jeho náboj $q(t) = U_C(t)C$) je formálně ekvivalentní výchylce mechanického oscilátoru, více viz [1].
Dále se již věnujme skokové změně napětí, kdy v čase $t = 0$ se napětí $U(t)$ skokově změní z konstantní hodnoty U_i na konstantní hodnotu U_f. Nejprve uvažujme homogenní diferenciální rovnici, tzn. rovnici (6.34) bez pravé strany. Předpokládejme řešení ve tvaru $U_C(t) = U_{C0}\mathrm{e}^{\lambda t}$. Po dosazení dostáváme charakteristickou rovnici

$$\lambda^2 + 2\alpha\lambda + \omega_0^2 = 0\ . \tag{6.36}$$

Řešení této kvadratické rovnice je

$$\lambda_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}\ , \quad \lambda_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}\ . \tag{6.37}$$

Obecné řešení homogenní části rovnice (6.34) pro případ $\alpha \neq \omega_0$ je

$$U_C(t) = U_{C1}\mathrm{e}^{\lambda_1 t} + U_{C2}\mathrm{e}^{\lambda_2 t}\ , \tag{6.38}$$

kde U_{C1} a U_{C2} jsou konstanty dané počátečními podmínkami. Teorie diferenciálních rovnic říká, že řešení nehomogenní rovnice (6.34) je pak lineární superpozice řešení homogenní rovnice (6.38) plus jakékoliv řešení nehomogenní rovnice. Řešení nehomogenní rovnice (6.34) s konstantní pravou stranou je konstanta. Tedy obecné řešení (6.34) pro $t > 0$ je

$$U_C(t) = U_{C1}\mathrm{e}^{\lambda_1 t} + U_{C2}\mathrm{e}^{\lambda_2 t} + U_f\ , \tag{6.39}$$

kde poslední konstanta na pravé straně je konečné napětí U_f, jelikož musí $U_C(t \to \infty) = U_f$.
Rozeznáváme zde tři případy. Pro $\alpha > \omega_0$ hovoříme o tzv. nadkritickém tlumení. Kořeny $\lambda_{1,2}$ (6.37) jsou reálné a řešení je dáno přímo rovnicí (6.39).
V opačném případě, kdy $\alpha < \omega_0$, se jedná o tzv. podkritické tlumení, kdy jsou kořeny $\lambda_{1,2}$ komplexní a reálnou část řešení (6.39) lze vyjádřit jako

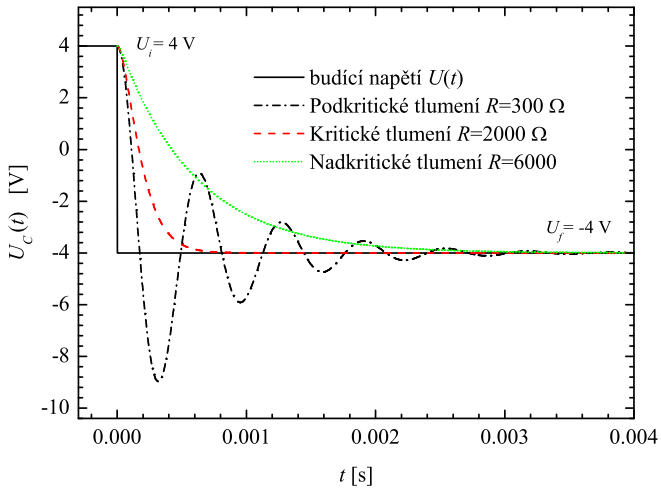
$$U_C(t) = U_{C3}\mathrm{e}^{-\alpha t}\sin\omega_d t + U_{C4}\mathrm{e}^{-\alpha t}\cos\omega_d t + U_f \tag{6.40}$$

nebo alternativně pomocí fáze ϕ jako

$$U_C(t) = U_{C5}\mathrm{e}^{-\alpha t}\cos(\omega_d t + \phi) + U_f\ , \tag{6.41}$$

kde U_{C3}, U_{C4}, U_{C5} resp. ϕ jsou opět konstanty dané počátečními podmínkami. Frekvence

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} \tag{6.42}$$



Obrázek 6.4: Přechodový jev RLC obvodu při skokové změně budícího napětí $U(t)$ z hodnoty 4 V na −4 V pro podkritické (R = 300 Ω), kritické (R = 2000 Ω) a nadkritické tlumení (R = 6000 Ω) a pro L = 0,1 H a C = 100 nF. Vyneseno je napětí na kondenzátoru úměrné jeho náboji.

se nazývá tlumená kruhová rezonanční frekvence, kterou obvod při přechodovém jevu dočasně kmitá.
Třetí hraniční případ je tzv. kritické tlumení, které nastává pro takové hodnoty odporu $R = R_k$, kdy

$$\alpha = \omega_0 \ . \tag{6.43}$$

Dosazením do rovnice (6.34) lze ukázat, že řešení má pro tento případ tvar

$$U_C(t) = (U_{C6} + U_{C7}t)\mathrm{e}^{\lambda t} + U_f \tag{6.44}$$

a vyznačuje se nejrychlejším útlumem daným $\lambda = -\alpha = -\omega_0$. Tento stav je žádoucí např. při stabilizaci, kdy je potřeba co nejrychleji utlumit systém vyvedený z rovnováhy vnějším stimulem. Všechna tato řešení musí splňovat počáteční podmínky. V našem případě musí napětí v čase $t = 0$ mít hodnotu $U_C(t = 0) = U_i$. Zároveň předpokládáme, že napětí U_i bylo dostatečně dlouho konstantní, takže je RLC obvod již v rovnováze, a tudíž se napětí s časem nemění a tedy proud je nulový, $I(t \to 0^-) = \mathrm{d}q(t = 0)/\mathrm{d}t = 0$. Vzhledem k tomu, že je součástí obvodu indukce, nemůže se proud měnit skokově, a tedy tato podmínka platí i v limitě $t \to 0$ zprava, tedy pro výše nalezená řešení. Aplikací těchto podmínek obdržíme volné konstanty. Pro nadkritické tlumení získáváme

$$U_{C1} = \frac{U_i - U_f}{1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2}} \ , \quad U_{C2} = \frac{U_i - U_f}{1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}} \ , \tag{6.45}$$

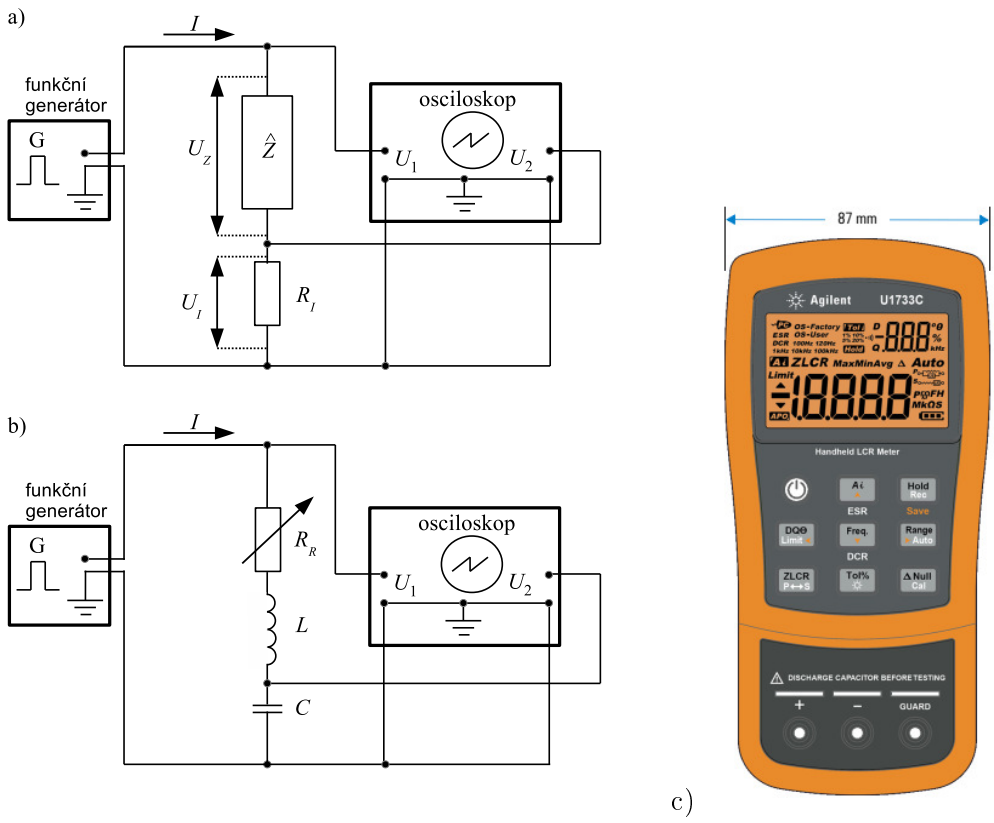
pro podkritické tlumení

$$U_{C5} = (U_i - U_f)\sqrt{1 + \left(\frac{\alpha}{\omega_d}\right)^2} \ , \quad \phi = -\arctan\left(\frac{\alpha}{\omega_d}\right) \tag{6.46}$$

a pro kritické tlumení

$$U_{C6} = U_i - U_f \ , \quad U_{C7} = (U_i - U_f)\alpha \ . \tag{6.47}$$

Tato řešení jsou vykresleny na obr. 6.4 pro realistickou situaci, kdy se napětí skokově mění z U_i = 4 V na U_f = −4 V pro jedno podkritické, nadkritické a kritické tlumení. Přechodový jev lze taktéž pozorovat pomocí proudu v RLC obvodu. Časové závislosti proudu bychom získali derivací výše obdržených vztahů.



Obrázek 6.5: (a) Aparatura pro měření impedance $\hat{Z}$ (nebo vodivosti $\hat{G} = 1/\hat{Z}$) sestávající z funkčního generátoru jako zdroje napětí U s určitou frekvencí, osciloskopu, měřené impedance $\hat{Z}$ a referenčního odporu R_I. V schématu jsou naznačena napětí U_I na referenčním odporu R_I a napětí U_Z na měřené impedanci Z. Referenční (stínící) vodiče kanálů U_1 a U_2 jsou uvnitř osciloskopu spojeny a uzemněny. (b) Aparatura analogická panelu (a) použitá pro měření přechodového jevu náboje na kondenzátoru C. (c) RLC metr Agilent U1733C.

Tlumení RLC oscilátoru se často také charakterizuje bezrozměrným jakostním činitelem Q, který je zde definován jako

$$Q = \frac{\omega_0}{2\alpha} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}\,, \tag{6.48}$$

který představuje počet oscilací N, které oscilátor vykoná, než jeho energie poklesne na $1/e$ původní hodnoty, vynásobený faktorem 2π, tj. $N = Q/(2\pi) \approx Q/6$. Energie je úměrná kvadrátu proudu, proto je v definici Q (6.48) faktor 2 ve jmenovateli.

Popis experimentální aparatury a měření

Úloha začíná měřením s RLC metrem Agilent U1733C, viz obr. 6.5(c). Je to moderní ruční přístroj umožňující měřit velikost impedance a z ní určit kapacitu, indukčnost nebo odpor součástek (volba přepínáním tlačítka ZLCR). Umožňuje změřit fázi impedance (zde označena jako θ) a z ní činitel jakosti Q nebo ztrátový činitel D (volba přepínáním tlačítka DQθ). Tento přístroj taktéž umožňuje změřit ekvivalentní sériový odpor (přepíná se podržením tlačítka *Ai* (ESR) na 3 s). Pro určení stejnosměrného odporu, např. cívky, se použije stejnosměrný mód, který se přepíná podržením tlačítka Freq. (DCR) na 3 s. Přístroj pracuje na diskrétních frekvencích 100, 120 Hz a 1, 10 a 100 kHz (přepínání tlačítkem Freq.) s tím, že po zapnutí je vždy nastavena referenční frekvence 1 kHz. Detailnější informace o přístroji jsou v jeho manuálu, který je možno najít na odkaze [5]. Měření s osciloskopem probíhá na aparatuře sestávající z funkčního generátoru jako zdroje napětí U o určité frekvenci f, osciloskopu, měřené impedanci $\hat{Z}$ a referenčním odporu R_I, viz obr. 6.5(a).

Druhý kanál osciloskopu U_2 měří napětí U_I na referenčním odporu R_I, pomocí něhož určíme proud obvodem $I = U_I/R_I = U_2/R_I$. První kanál osciloskopu U_1 je připojen na výstup z funkčního generátoru a měří celkové napětí $U_1 = U_Z + U_I$. V osciloskopu jsou vždy referenční (stínící) vodiče obou kanálů propojeny a uzemněny (v obr. 6.5(a) naznačeno čárkovaně), tedy první kanál nemůže být připojen pouze na testované impedanci $\hat{Z}$, ale musí mít propojený zemnící vodič se zemnícím kontaktem funkčního generátoru. Signální kontakty kabeláže jak na osciloskopu tak na funkčním generátoru mají červenou barvu, kdežto stínící (uzemněné) kontakty buď modrou nebo černou barvu.
Impedanci $\hat{Z}$ vyjádříme pomocí její definice. Jelikož $U_Z = U_1 - U_I = U_1 - U_2$, pak

$$\hat{Z} = \frac{\hat{U}_Z}{\hat{I}} = R_I \frac{\hat{U}_Z}{\hat{U}_I} = R_I \frac{\hat{U}_1 - \hat{U}_2}{\hat{U}_2} \,, \tag{6.49}$$

kde jsme přešli ke komplexní reprezentaci všech napětí. Moderní osciloskopy umožňují vyjádřit rozdíl signálů $U_M = U_1 - U_2$ a změřit jak jeho amplitudu U_{M0} (tzv. špička-špička, v angl. peak-to-peak) tak fázi $\varphi_{M\to 2} = \varphi_M - \varphi_2$ vůči kanálu U_2. Impedanci (6.49) pak vyjádříme pomocí experimentálně měřitelných veličin U_{M0}, $\varphi_{M\to 2}$ a amplitudy druhého kanálu U_{20} jako

$$\hat{Z} = R_I \frac{\hat{U}_M}{\hat{U}_2} = R_I \frac{U_{M0}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_M}}{U_{20}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_2}} = R_I \frac{U_{M0}}{U_{20}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_M - \mathrm{i}\varphi_2} = R_I \frac{U_{M0}}{U_{20}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_{M\to 2}} \tag{6.50}$$

Amplituda impedance $|\hat{Z}|$ resp. její fáze φ_Z je pak rovna

$$|\hat{Z}| = \frac{R_I U_{M0}}{U_{20}} \quad \text{resp.} \quad \varphi_Z = \varphi_{M\to 2} \,. \tag{6.51}$$

Pro amplitudu vodivosti $|\hat{G}|$ resp. její fázi φ_G získáme z definice $\hat{G} = 1/\hat{Z}$ vztahy

$$|\hat{G}| = \frac{U_{20}}{R_I U_{M0}} \quad \text{resp.} \quad \varphi_G = -\varphi_{M\to 2} \,. \tag{6.52}$$

Měření probíhá s pomocí digitálního osciloskopu Keysight DSOX2002A. Pro přesné změření hodnoty špička-špička a fáze je důležité, aby byly průběhy signálu na obrazovce dobře prokreslené, tzn., aby horizontální osa (čas) byla nastavena tak, aby na ní bylo několik málo (1–5) period, a vertikální osy (napětí) nastavené tak, aby signál byl v rozpětí asi 40–100 % rozsahu obrazovky. Toto je potřeba při změně frekvence typicky vždy znovu nastavit. Detailnější informace o přístroji jsou v jeho manuálu, který je možno najít na odkazu [6].
Jako zdroj signálu se používá digitální funkční generátor Tektronix AFG2021. Má výstupní impedanci $R_g = 50\ \Omega$, což si lze představit pomocí náhradního zapojení, kdy se k ideálnímu zdroji napětí do série přidá odpor 50 Ω. Tento odpor se do funkčních generátorů přidává, aby se minimalizovaly odrazy signálů od koaxiálního vedení, které má charakteristickou impedanci 50 Ω a je zakončeno zátěží 50 Ω. Vnitřní odpor funkčního generátoru se při měření přechodového jevu projeví jako efektivní navýšení odporu RLC obvodu o 50 Ω, který je tedy potřeba při interpretaci výsledků započíst. Při měření frekvenční závislosti vodivosti RLC obvodu se vnitřní odpor funkčního generátoru projeví jako pokles výstupního napětí v rezonanci – takto je možno velikost vnitřního odporu změřit. Jelikož je při výpočtu vodivosti proud dělený tímto výstupním napětím, vnitřní odpor se na výsledných hodnotách vodivosti neprojeví. Detailnější informace o přístroji jsou v jeho manuálu, který je možno najít na odkazu [7].

Zpracování dat

Frekvenční závislost vodivosti

Jak je zřejmé z obr. 6.3, rezonanční frekvenci je možno graficky určit z polohy maxima rezonanční křivky nebo i přesněji z frekvence, kde fáze prochází nulou. Hodnoty R, L, a C lze získat

z frekvenční závislost vodivosti $|\hat{G}(\omega)|$ pomocí její hodnoty v rezonanci, šířky rezonanční křivky a její rezonanční frekvence, viz diskuze pod vztahem (6.32).
Alternativně či doplňkově lze všechny tyto hodnoty získat proložením teoretické závislosti (6.30) na $|\hat{G}(f)|$, viz program [4]. Tento ukázkový program je napsaný v jazyce Python a pro numerickou minimalizaci používá balíček LMfit. Zpracování dat proložením dává přesnější výsledky, protože se využijí všechny měřené body. Navíc získáme statistický odhad náhodných chyb výsledků a také můžeme testovat, nakolik frekvenční závislost dat odpovídá teoretické předpovědi.

Přechodový jev

V případě podkritického tlumení je možné určit koeficient exponenciálního poklesu amplitudy α náboje z časového průběhu napětí. Z rovnice (6.41) vidíme, že obálka maxim nebo minim oscilací klesá exponenciálně jako $U_{C\max}(t) = U_{C5}\mathrm{e}^{-\alpha t} + U_f$. Odečtením U_f a logaritmováním získáme

$$\ln(U_{C\max}(t) - U_f) = \ln U_{C5} - \alpha t \ . \tag{6.53}$$

Tedy závislost přirozeného logaritmu rozdílu $U_{C\max}(t) - U_f$ je lineární funkce času a její směrnice je $-\alpha$. Proložením lineární funkce několika body lze testovat, nakolik je pokles lineární, a určit konstantu α. Souřadnice několika maxim (minim) můžeme určit buď s pomocí kurzoru osciloskopu nebo lze časový průběh uložit na USB disk a souřadnice oscilací určit na počítači (doporučováno). Z konstanty α vypočtěte se znalostí hodnoty L z předešlých měření odpor celého RLC obvodu R s pomocí vzorce (6.24). Tento odpor je dán součtem ekvivalentních sériových odporů všech součástek R_{celek} na frekvenci oscilací, viz (6.33). Tento odpor je však v případě přechodového jevu ještě navíc navýšen vnitřním odporem funkčního generátoru, který je $R_g = 50\ \Omega$, viz diskuze v popisu experimentu. Srovnejte hodnoty R a $R_{\mathrm{celek}} + R_g$. Tlumenou frekvenci oscilací ω_d určíme jednoduše odečtením periody několika oscilací. Z obdržené hodnoty spočtěte (netlumenou) frekvenci RLC obvodu ω_0 s pomocí vztahu (6.42) a srovnejte ji s hodnotou obdrženou z frekvenční závislosti vodivosti.
V případě nadkritického tlumení můžeme podobným způsobem určit exponenciální pokles napětí. Situace je zde komplikovanější, protože řešení (6.39) je v obecnosti součtem dvou exponenciál. Ale v režimu, kdy α je velké (přibližně pro $\alpha > 2\omega_0$) a tedy koeficienty (6.37) znatelně rozdílné, však pro dostatečně dlouhé časy zbude z řešení (6.39) pouze exponenciála s pomalejším útlumem λ_1. Analogicky k (6.53) pak získáváme rovnici $\ln(U_C(t) - U_f) = \ln U_{C1} + \lambda_1 t$, ze které určíme λ_1. Z hodnoty λ_1 je možno vyjádřit na základě známých hodnot L a ω_0 hodnotu odporu R s pomocí rovnic (6.37) a (6.24) jako

$$R = -L\frac{\omega_0^2 + \lambda_1^2}{\lambda_1} \ . \tag{6.54}$$

V případě kritického tlumení není průběh napětí (6.44) přesně exponenciální a tudíž nelze jednoduše použít rovnici (6.53). Při zpracování protokolu se tedy spokojme s nalezením hodnoty odporu kritického tlumení R_k a srovnání s předpovědí této hodnoty s pomocí vztahů (6.43) a (6.24) na základě dříve změřených hodnot L a ω_0.
Opět alternativně či doplňkově lze ve všech těchto případech časové průběhy zpracovat proložením teoretickými vztahy (6.39), (6.41) a (6.44) pomocí programu analogickému k ukázce [4].

Úkoly pro měření a zpracování dat

1. **Impedance odporu, cívky a kondenzátoru.**

   (a) Měření pomocí RLC metru Agilent U1733C na frekvenci 1 kHz.

   i. Změřte velikost odporu dekády R_R ($\leq$ 30 Ω), kapacitu kondenzátoru C, a indukci cívky L. Změřte také fázový úhel těchto součástek φ_R, φ_C resp. φ_L a ekvivalentní sériový odpor kondenzátoru R_C a cívky R_L. Vzhledem k indukčnosti cívek použitých v praktiku volte kondenzátor s kapacitou v rozmezí přibližně 200 nf až 1,5 μF. Nominální odpor R_R nastavený na dekádě volte tak aby s rezervou platilo $R_R < 2\frac{L}{C}$. Jde zde o to, aby při použitém odporu nastalo při měření přechodového jevu podkritické tlumení (viz (6.37))

   ii. V případě cívky změřte taktéž stejnosměrný odpor R_L^{DC} buď pomocí RLC metru v režimu stejnosměrného proudu (DCR), nebo pomocí stejnosměrného multimetru.

   iii. Ze získaných hodnot C a L vypočtěte již v praktiku teoretickou hodnotu rezonanční frekvence f_0 sériového RLC obvodu, viz (6.26).

   (b) Měření pomocí osciloskopu s využitím zapojení podle obr. 6.5(a). Velikost referenčního odporu R_I zvolte přibližně 10 Ω. Použijte harmonický tvar signálu v funčním generátoru.

   i. Změřte amplitudu impedance $|\hat{Z}|$ a fázi impedance φ_Z, viz (6.51), odporu, kondenzátoru a cívky na několika frekvencích v rozmezí 100–3000 Hz (např. na 100, 300, 1000 a 3000 Hz a frekvenci f_0).

   ii. Pro jednotlivé frekvence do protokolu vypočtěte u odporu hodnotu R_R, viz (6.10), u kondenzátoru C a R_C, viz (6.15) a (6.16), a u cívky L, a R_L, viz (6.21) a (6.22).

2. **Rezonance sériového RLC obvodu**. Použijte zapojení s osciloskopem podle obr. 6.5(a), kde jako impedanci $\hat{Z}$ použijte stejné součástky R_R, L, C jako v předchozí části zapojené v sérii.

   (a) Změřte frekvenční závislost amplitudy vodivosti, $|\hat{G}|$, a fázi vodivosti, φ_G, viz (6.52). Měřte ve frekvenčním rozsahu v okolí rezonance, kde se fáze mění v rozsahu od -80° do 80°, s krokem asi 10°, případně i na několika dalších frekvencích dále od rezonance.

   (b) Z frekvenční závislosti amplitudy vodivosti určete do protokolu hodnoty R, L, C, ω_0, a f_0, viz předchozí odstavec o zpracování dat. Srovnejte tyto hodnoty s výsledky obdrženými z předchozí části a s hodnotou R_{celek} (6.33). Z těchto hodnot vypočtěte také hodnoty α, viz (6.24), F, viz (6.29), a Q, viz (6.48).

   (c) Vykreslete teoretickou frekvenční závislost $|\hat{G}|$ a φ_G pro obdržené hodnoty R, L a C a srovnejte je s naměřenými daty.

3. **Přechodový jev (vlastní kmity) v RLC obvodu**. Použijte zapojení podle obr. 6.5(b) a obdélníkové pulzy funkčního generátoru s nízkou frekvencí asi 30 Hz.

   (a) Změřte přechodový jev pro stejnou hodnotu odporu dekády R_R jako v předchozí části (podkritické tlumení) a uložte data na flash disk.

   Do protokolu určete hodnoty ω_d, tlumící konstantu α a jí odpovídající odpor celého RLC obvodu R. Srovnejte ji s hodnotou R_{celek} (6.33)+R_g, viz diskuze v části zpracování dat. Určete ω_0, viz (6.42), a f_0. Výsledky srovnejte s hodnotami obdrženými pomocí frekvenční závislosti vodivosti.

   (b) Nalezněte hodnotu odporu dekády R_R odpovídající kritickému útlumu a změřte přechodový jev. Srovnejte hodnotu R_{celek} (6.33)+R_g s předpovědí odporu kritického tlumení R_k na základě L a ω_0 s pomocí vztahů (6.43) a (6.24).

(c) Změřte přechodový jev pro jednu hodnotu odporu dekády R_R v oblasti nadkritického tlumení odpovídající $R_R > 2R_c$. Určete faktor exponenciálního poklesu λ_1, viz (6.37), viz diskuze v části zpracování dat. Z hodnoty λ_1 vypočtěte s pomocí rovnice (6.54) hodnotu odporu R a srovnejte ji s hodnotou $R_{\text{celek}} + R_g$.

Literatura k úloze 6

[1] R.P. Feynman, R.B. Leighton, M. Sands: *Feynmanove prednášky z fyziky I*, Alfa, 1980, kapitola 23.

[2] J. Koutný a I. Vlk: *Elektronika I, učebnice*, Vyšší odborná škola a Střední průmyslová škola elektrotechnická, Olomouc 2009.

[3] J. Maťátko: *Elektronika*, Praha: IDEA SERVIS, 2008.

[4] Příklad proložení (tzv. fitování) dat teoretickou formulí v jazyku Python 3 je možno stáhnout z depozitáře 06_RLC_FitovaciPrikladPython3p8.zip.

[5] Manuál k RLC metru Agilent U1731 je možno stáhnout z aktuální interaktivní osnovy v ISu MUNI.

[6] Manuál k osciloskopu Keysight DSOX2002A je možno stáhnout z aktuální interaktivní osnovy v ISu MUNI.

[7] Manuál k funkčnímu generátoru Tektronix AFG2021 je možno stáhnout z aktuální interaktivní osnovy v ISu MUNI.

Ústav fyziky kondenzovaných látek
Přírodovědecká fakulta, Masarykova univerzita, Brno

Fyzikální praktikum 2

7. Odraz a lom světla, Fresnelovy vztahy, Snellův zákon

Úkoly k měření

Měření odrazivosti dielektrika

- Proměřte odrazivosti s a p polarizovaného světla od dielektrika.
- Z Brewsterova úhlu určete index lomu a porovnejte naměřené závislosti na úhlu dopadu paprsku s vypočtenými hodnotami.

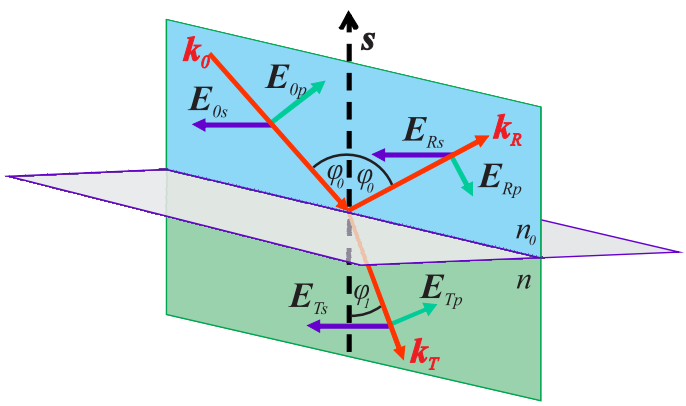
Průchod světla planparalelní deskou

- Proměřte posuv paprsku při průchodu planparalelní deskou.
- Z průběhu závislosti posuvu na úhlu dopadu určete index lomu desky.

Měření odrazivosti dielektrika

Teorie

Chování elektromagnetické světelné vlny při odrazu (nebo lomu) na rozhraní dvou neabsorbujících prostředí zjistíme z Maxwellových rovnic [1, 2]. Situace je znázorněna na obr. 7.1. Rovina dopadu je definována dopadajícím paprskem světla s vlnovým vektorem $\boldsymbol{k}_0$ a kolmicí $\boldsymbol{s}$ k uvažovanému rozhraní dvou dielektrických prostředí. $\boldsymbol{E}_0$ a $\boldsymbol{E}_R$ jsou amplitudy dopadající a odražené vlny, přičemž p a s jsou složky amplitudy lineárně polarizovaného světla rovnoběžné s rovinou dopadu resp. kolmé k této rovině. Symbolem n_0 je označen index lomu okolního prostředí (vzduch), n je index lomu měřeného dielektrika. Řešením vlnové rovnice dostáváme pro odraženou vlnu s vlnovým



Obrázek 7.1: Rozklad amplitudy elektromagnetické vlny do s- a p-polarizace při odrazu na rozhraní.

vektorem $\boldsymbol{k}_R$ Fresnelovy amplitudy r_p a r_s ($r_p = |\boldsymbol{E}_{Rp}|/|\boldsymbol{E}_{0p}|$, $r_s = |\boldsymbol{E}_{Rs}|/|\boldsymbol{E}_{0s}|$; $\boldsymbol{E}_{Rs}$ a $\boldsymbol{E}_{0s}$ jsou kolmé k rovině dopadu a $\boldsymbol{E}_{Rp}$ a $\boldsymbol{E}_{0p}$ leží v rovině dopadu), které jsou dány vztahy

$$r_p = -\frac{\tan(\varphi_0 - \varphi_1)}{\tan(\varphi_0 + \varphi_1)} \qquad r_s = -\frac{\sin(\varphi_0 - \varphi_1)}{\sin(\varphi_0 + \varphi_1)} \tag{7.1}$$

kde úhel φ_0 je úhel dopadu světelného paprsku na rozhraní a φ_1 označuje úhel lomu lomeného paprsku s vlnovým vektorem $\boldsymbol{k}_T$. Tyto úhly souvisí prostřednictvím Snellova zákona

$$n_0 \sin\varphi_0 = n_1 \sin\varphi_1. \tag{7.2}$$

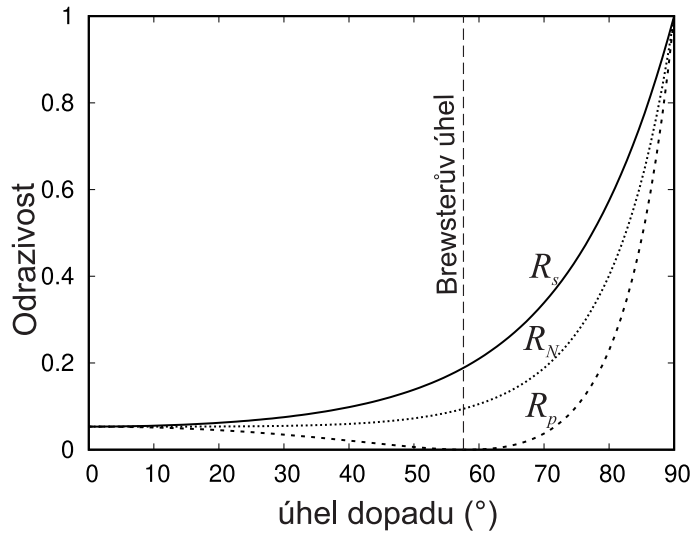
Na základě Snellova zákona (7.2) je možné vztahy (7.1) přepsat do tvaru

$$r_p = \frac{n_0 \cos\varphi_1 - n \cos\varphi_0}{n_0 \cos\varphi_1 + n \cos\varphi_0} \qquad r_s = \frac{n_0 \cos\varphi_0 - n \cos\varphi_1}{n_0 \cos\varphi_0 + n \cos\varphi_1}. \tag{7.3}$$

Z této dvojice vztahů je zřejmé, že amplitudy $\boldsymbol{E}_{Rp,s}$ jsou závislé na úhlu dopadu φ_0 světelného paprsku a na indexech lomu obou prostředí. Rozbor vztahů (7.1) ukazuje, že při šíření světla z prostředí opticky řidšího do opticky hustšího ($n_0 < n$) je amplituda $r_s < 0$ pro všechny úhly dopadu, zatímco $r_p < 0$ pro $\varphi < \varphi_B$ a $r_p > 0$ pro $\varphi > \varphi_B$, kde φ_B je tzv. polarizační (Brewsterův) úhel, pro nějž je $r_p = 0$.[14] Tento fakt je významný pro optickou praxi. V tomto případě se totiž odráží pouze s-složka lineárně polarizovaného světla. To platí i pro odraz přirozeného světla a proto lze odrazem na povrchu dielektrického zrcadla při polarizačním úhlu dosáhnout lineárně polarizované vlny. Je-li $r_p = 0$, pak jmenovatel v prvním vztahu (7.1) roste do nekonečna, tedy $\varphi_0 + \varphi_1 = \pi/2$; paprsek odražený a lomený jsou navzájem kolmé. Ze vztahu (7.3) pro $r_p = 0$, dostáváme matematický zápis Brewsterova zákona

$$\tan\varphi_B = n, \tag{7.4}$$

pokud $n_0 = 1$.



Obrázek 7.2: Závislost odrazivosti s-polarizované (R_s) a p-polarizované (R_p) vlny na úhlu odrazu podle Fresnelových vztahů na prostředí s indexem lomu $n = 1{,}6$. Odrazivost nepolarizovaného světla (R_N).

[14] Záporné hodnoty amplitud znamenají fázový posuv o π. Je-li $r_p > 0$ a $r_s < 0$, je složka r_s posunuta o π proti složce r_p. Je-li $r_p < 0$ a $r_s < 0$, mají sice obě fázový posuv o π, ale jejich fázový rozdíl je 0 nebo 2π.

Je-li intenzita složek dopadajícího světla I_p^0 a I_s^0 a intenzita odraženého světla pro obě složky I_p^R a I_s^R, pak definujeme odrazivosti R_p a R_s jako

$$R_p = \frac{I_p^R}{I_p^0} \qquad R_s = \frac{I_s^R}{I_p^0}. \tag{7.5}$$

Odrazivosti jsou pak dány vztahy

$$R_p = r_p^2 \qquad R_s = r_s^2. \tag{7.6}$$

Závislosti R_p a R_s na úhlu dopadu mají odlišný charakter (viz obr. 7.2). Veličina R_s monotonně roste s rostoucí hodnotou φ_0, a při úhlu dopadu 90 stupňů je rovná jedné. Odrazivost R_p s rostoucí hodnotou úhlu dopadu nejprve klesá k nule, při $\varphi_0 = \varphi_B$ je $R_p = 0$ a pro $\varphi_0 > \varphi_B$ opět rychle roste: pro 90 stupňů je opět $R_p = 1$. Odrazivost přirozeného světla odraženého na rozhraní dvou neabsorbujících prostředí je pak dána vztahem

$$R_N = R_s/2 + R_p/2. \tag{7.7}$$

Z odrazivostí R_p a R_s jsme také schopni stanovit hodnoty indexu lomu měřeného dielektrika. Výrazy $\pm\sqrt{R_p}$ a $\pm\sqrt{R_s}$ odpovídají pravé straně vztahů (7.3), přičemž znaménko plus nebo mínus před odmocninou je dáno v každém konkrétním případě fyzikální podstatou problému. Za předpokladu, že se měření provádí ve vzduchu, platí $n_0 = 1$ a můžeme např. z prvního vztahu (7.3) vypočítat $\cos\varphi_1$ a dosadit jej do druhého vztahu (7.3). Jednoduchou úpravou pak dostaneme za předpokladu, že provádíme měření na skle, následující vztahy pro hledaný index lomu skla: pro úhly dopadu $\varphi_0 < \varphi_B$ platí

$$n = \sqrt{\frac{(1+\sqrt{R_s})(1+\sqrt{R_p})}{(1-\sqrt{R_s})(1-\sqrt{R_p})}}, \tag{7.8}$$

pro případ $\varphi_0 > \varphi_B$ pak

$$n = \sqrt{\frac{(1+\sqrt{R_s})(1-\sqrt{R_p})}{(1-\sqrt{R_s})(1+\sqrt{R_p})}}. \tag{7.9}$$

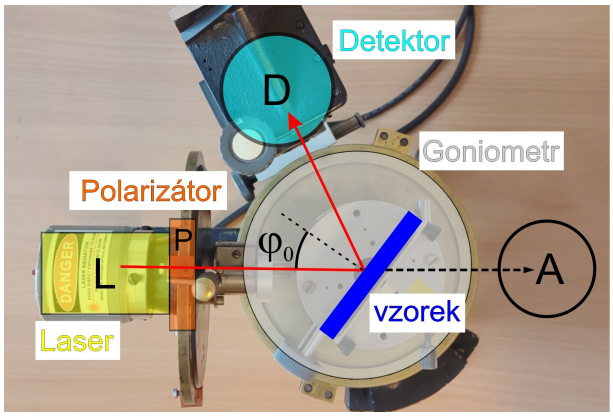
Tento postup v sobě skrývá určitou potíž spočívající v tom, že výpočet indexu lomu je v tomto případě založen na znalosti absolutních hodnot odrazivosti p- a s- složky lineárně polarizovaného světla.

Experiment

Smyslem této úlohy je zjistit průběh křivek $R_p = f(\varphi_0)$ a $R_s = f(\varphi_0)$ pro danou neabsorbující látku a využitím vztahu (7.4) určit pro použitou vlnovou délku světla index lomu dané látky. Principiální uspořádání experimentu je uvedeno na obr. 7.3: úzký svazek paprsků vycházející z laseru (L) prochází polarizátorem (P). Zde se světlo lineárně polarizuje a otáčením polarizátoru lze docílit toho, že kmitová rovina je rovnoběžná (kolmá) s rovinou dopadu, což odpovídá p- (s-) složce amplitudy dopadajícího světla. Po odrazu světla na měřeném vzorku umístěném na stolečku goniometru svazek světla dopadá na detektor (D) spojený s měřícím přístrojem. Otáčením stolečku se vzorkem kolem jeho svislé osy měníme úhel dopadu φ_0 světelného svazku a odečítáme signál na měřicím přístroji detektoru (ampérmetru). Chceme-li určit úhlovou závislost odrazivosti R_p a R_s, je třeba před začátkem měření odstranit ze stolečku měřený vzorek a v místě označeném (A) detektorem stanovit intenzitu dopadajícího svazku I_s^0 a I_p^0. Odrazivosti odraženého světla R_p a R_s pak vyjádříme jako

$$R_p = \frac{I_p^R}{I_p^0} \qquad R_s = \frac{I_s^R}{I_s^0}, \tag{7.10}$$

kde I_p^R a I_s^R jsou s a p polarizované intenzity odraženého záření.
POZOR! ZÁŘENÍ LASERU JE NEBEZPEČNÉ PRO OKO!!



Obrázek 7.3: Experimentální uspořádání pro měření úhlové závislosti odrazivosti dielektrika. Poloha detektoru A odpovídá referenční pozici pro měření signálu bez vzorku.

Úkoly

1. Stanovte úhlové závislosti odrazivosti R_p, R_s lineárně polarizovaného světla pro danou látku.
2. Určetě hodnotu Brewsterova úhlu daného dielektrického zrcadla při měření zesíleného signálu detektoru v okolí minima I_p^R a tuto závislost vyneste do grafu. Nejistoty φ_B určete z kroku měřeného úhlu dopadu.
3. Stanovte ze vztahu (7.4) hodnotu indexu lomu dané látky.
4. Pro několik (alespoň 5) hodnot úhlů dopadu stanovte index lomu destičky ze vztahu (7.8), případně (7.9). Výsledek porovnejte s předchozím výpočtem pomocí φ_B.
5. Vypočítejte průběh odrazivosti nepolarizovaného světla ze vztahu (7.7) a znázorněte v dřívějším grafu společně s R_s a R_p.
6. Grafy závislostí R_s a R_p na úhlu dopadu porovnejte s teoretickou závislostí podle vztahů (7.1) nebo (7.3) a (7.6). Do teoretických vztahů dosaďte index lomu určený z Brewsterova úhlu nebo průměr hodnot indexu lomu vypočtených ze vztahů (7.8) a (7.9).

Průchod světla planparalelní deskou

Teorie

Zde odvodíme závislost posuvu vystupujícího a vstupujícího paprsku na úhlu dopadu α, tloušťce desky d a indexu lomu skla n, kde planparalelní deska je umístěna v prostředí s indexem lomu n_0. Situace je znázorněna na obrázku 7.4. Protože obě rozhraní jsou rovnoběžná, je úhel dopadu α_1 na první rozhraní roven úhlu lomu α_2 na druhém rozhraní, položíme $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$, a úhel lomu β_1 na prvním rozhraní je roven úhlu dopadu β_2 na druhém rozhraní, tudíž platí $\beta_1 = \beta_2 = \beta$. Zákon lomu na prvním rozhraní je

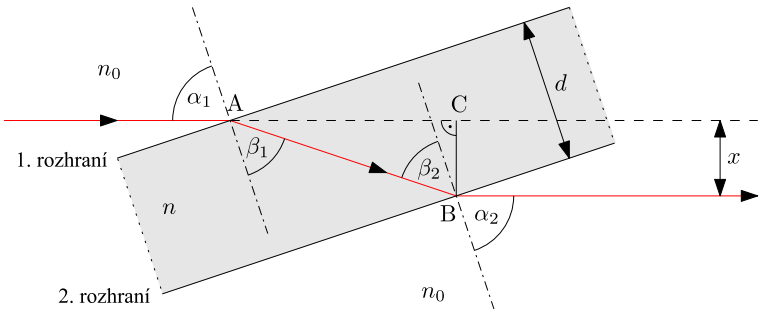
$$n_0 \sin\alpha = n \sin\beta \tag{7.11}$$

a na druhém rozhaní

$$n \sin\beta = n_0 \sin\alpha. \tag{7.12}$$

Délka dráhy paprsku AB v planparalelní desce je

$$|AB| = \frac{d}{\cos\beta}. \tag{7.13}$$



Obrázek 7.4: Průchod světla planparalelní deskou.

Odchylka x vstupujícího a vystupujícího paprsku je

$$x = |BC| = |AB| \sin(\alpha - \beta). \tag{7.14}$$

Úpravou a použitím vztahů

$$\cos\beta = \sqrt{1 - \sin^2\beta}, \qquad \sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta, \tag{7.15}$$

obdržíme z (7.11)–(7.14) vztah pro odchylku paprsků,

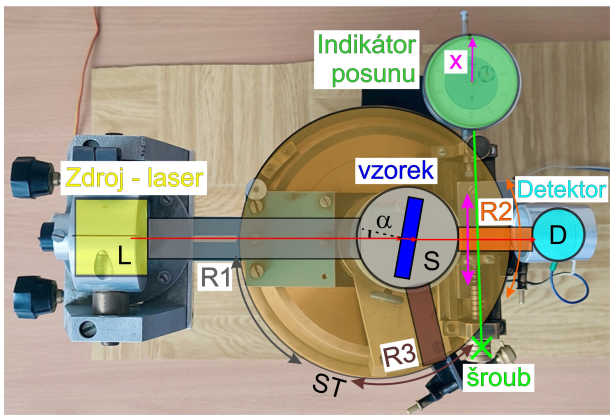
$$x = \left(1 - \frac{n_0 \cos\alpha}{\sqrt{n^2 - n_0^2 \sin^2\alpha}}\right) d \sin\alpha. \tag{7.16}$$

Z tohoto vztahu můžeme určit index lomu skla za předpokladu, že $\alpha \neq 0$:

$$n = n_0 \sqrt{\sin^2\alpha + \left(1 - \frac{x}{d\sin\alpha}\right)^{-2} \cos^2\alpha}. \tag{7.17}$$

Experiment

Pro měření úhlu dopadu, posuvu x nebo úhlu deviace použijeme goniometr, jehož schéma a fotografie jsou na obrázku 7.5. Goniometr obsahuje kruhovou stupnici ST, po které se pohybují tři ramena: R1 se zdrojem, kterým je laserová dioda L, R2 s detektorem D tvořeným Si fotodiodou a R3 se stolečkem S pro vzorek umístěným ve středu kruhu. Na stolek klademe zkoumanou planparalelní desku (nebo hranol). Detektorem lze posunovat šroubem ve směru x kolmo na



Obrázek 7.5: Experimentální uspořádání pro měření průchodu světla planparalení deskou a hranolem.

rameno R2. Posuv se měří pomocí indikátoru v podobě číselníkového úchylkoměru. Úhel dopadu α určujeme z polohy ramen R1 a R3, úhel deviace výstupního paprsku δ z polohy ramen R1 a R2 (pro desku je $\delta = 0$).
Před měřením je třeba nastavit stolek S tak, aby paprsek dopadal kolmo na měřenou planparalelní desku nebo hranol. Dosáhne se toho pomocí tří stavících šroubů pod stolečkem. Kolmost dopadajícího paprsku na lámavou plochu poznáme podle chodu zpětně odraženého paprsku: oba paprsky musí mít totožnou dráhu – sledujeme stopu odraženého paprsku u výstupního otvoru zdroje. (Pokud použijeme hranol, tak jeho lámavý úhel je 60°.)
Úhel dopadu měňte otáčením stolečku S ramenem R3. Správnou polohu detektoru poznáte podle maximální hodnoty fotoproudu, který měřte digitálním ampermetrem (na rozsahu 200 μA).

POZOR! ZÁŘENÍ LASERU JE NEBEZPEČNÉ PRO OKO!!

Úkoly

1. Proveďte justaci přístroje a určete závislost posuvu vystupujícího paprsku z planparalelní desky na úhlu dopadu. Naměřte asi 10 hodnot dvojic x a α.

2. Z naměřené závislosti určete pomocí vztahu (7.17) index lomu desky. Tloušťku planparalelní desky d určete pomocí posuvného měřítka nebo mikrometru.

3. Vyneste naměřenou závislost posuvu na úhlu dopadu do grafu a porovnejte s teoretickou závislostí podle vztahu (7.16) na základě indexu lomu získaného v předchozím úkolu.

Literatura k úloze 7

[1] A. Vašíček: *Optika tenkých vrstev*, NČSAV Praha 1956.

[2] R.P. Feynman, R.B. Leighton, M. Sands: *Feynmanovy přednášky z fyziky s řešenými příklady 2/3*, Fragment (2006).

[3] A. Kučírková a K. Navrátil: *Fyzikální měření I*, SPN Praha 1986.

Ústav fyziky kondenzovaných látek
Přírodovědecká fakulta, Masarykova univerzita, Brno

Fyzikální praktikum 2

8. Měření parametrů zobrazovacích soustav

Úkoly k měření

- Měření ohniskové vzdálenosti tenké spojky.
- Měření ohniskové vzdálenosti tenké rozptylky.
- Určení indexu lomu čoček z ohniskové vzdálenosti a měření křivosti.

Teorie

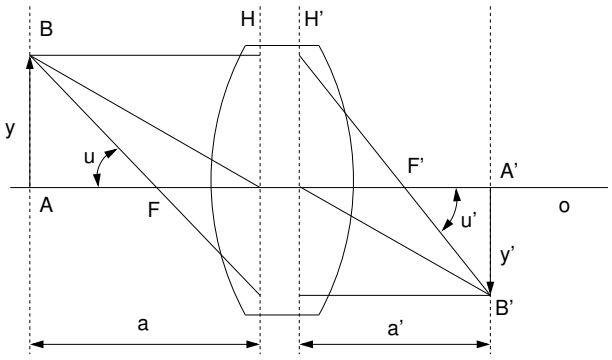
Průchod paraxiálních paprsků soustavou centrovaných kulových lámavých ploch je popsán zakladními zobrazovacími parametry, mezi než patří hlavní a uzlové body (respektive roviny), ohniska a ohniskové vzdálenosti. Dopadá-li na zobrazovací soustavu (obr. 8.1) svazek paprsků rovnoběžných s optickou osou O, pak po průchodu soustavou se paprsky protínají v obrazovém ohnisku F'. Naopak, svazek paprsků vycházejících z bodu F (předmětové ohnisko) se změní po průchodu soustavou na rovnoběžný svazek. Rovina kolmá k optické ose procházející předmětovým, respektive obrazovým ohniskem se nazývá předmětovou, respektive obrazovou ohniskovou rovinou. Na obr. 8.1 jsou obrazem bodů A, B body A', B'. Poměr úseček $y' = A'B'$ a $y = AB$ se nazývá příčným zvětšením β,

$$\beta = \frac{y'}{y}. \tag{8.1}$$

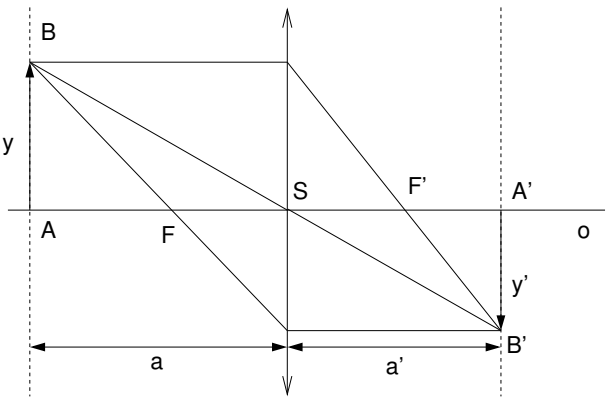
Poměr úhlů α' a α, které svíraji sdružené paprsky procházející ohnisky s optickou osou, se nazývá úhlové zvětšení γ,

$$\gamma = \frac{u'}{u}. \tag{8.2}$$

Hlavními rovinami H a H' soustavy nazýváme dvojici sdružených rovin, kolmých k optické ose, pro než je příčné zvětšení rovno jedné. Hlavními body nazýváme průsečíky hlavních rovin s optickou



Obrázek 8.1: Zobrazení pomocí zobrazovací soustavy. Hlavní roviny čočky jsou označeny H a H', ohniska F a F', AB je předmět a $A'B'$ obraz.



Obrázek 8.2: Přímé měření ohniskové vzdálenosti tenké čočky.

osou. Je-li tloušťka čočky zanedbatelná ve srovnání s poloměry křivosti lámavých ploch, hovoříme o tenké čočce. V takovém případě hlavní roviny H a H' splývají a čočka je pak při výpočtech představována rovinou středního řezu.

Znaménková konvence a zobrazovací rovnice tenké čočky

Předmětový a obrazový prostor jsou charakterizovány souřadnými soustavami, jejichž počátky v případě tenké čočky leží ve stejném bodě ve středu čočky. Při výpočtech je nutné rozlišovat kladné a záporné hodnoty v těchto souřadných soustavách. Definice kladného a záporného prostoru může být různá, avšak je-li zvolená určitá definice, všechny vztahy musí být v souhlasu s touto konvencí. Budeme důsledně používat následující znaménkovou konvenci: vzdálenost měříme od středu čočky a sice tak, že leží-li bod napravo od počátku bereme vzdálenosti kladně a v opačném případě záporně; leží-li bod nad osou O bereme vzdálenosti kladně a v opačném případě záporně. Na obr. 8.2 je znázorněno zobrazování spojkou – vidíme, že tady $a < 0$, $a' > 0$, $f < 0$, $f' > 0$, $y > 0$ a $y' < 0$. V uvedené znaménkové konvenci zobrazovací rovnice čočky má tvar

$$\frac{1}{a'} - \frac{1}{a} = \frac{1}{f'}, \tag{8.3}$$

kde a je předmětová vzdálenost, a' je obrazová vzdálenost a f' je obrazová ohnisková vzdálenost.

Stanovení ohniskové vzdálenosti tenké spojky z polohy obrazu a předmětu

Ze zobrazovací rovnice (8.3) vyplývá pro ohniskovou vzdálenost f' vztah

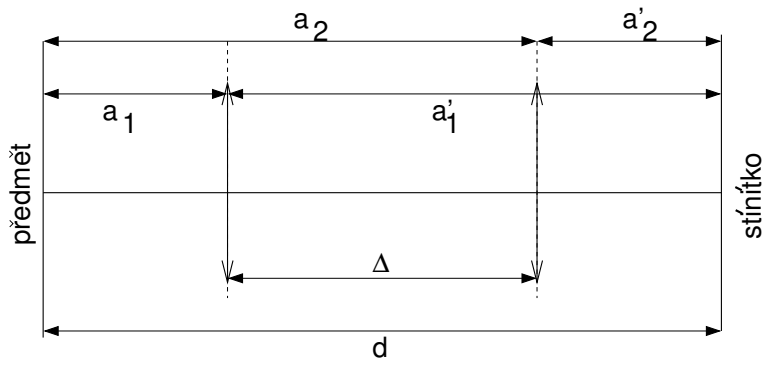
$$f' = \frac{aa'}{a - a'}. \tag{8.4}$$

Určíme-li tedy vzdálenosti a a a', pak pomocí vztahu (8.4) vypočítame f'. Měření se provádí na optické lavici s měřítkem, na které je umístěn předmět y (svítící šipka s vestavěným měřitkem), studovaná čočka S a stínítko, na něž zachycujeme obraz y' (viz obr. 8.2). Změnou polohy čočky nebo stínítka při stálé poloze předmětu hledáme co nejlépe zaostřený obraz a odečteme na měřítku optické lavice hodnoty a, a'.

Stanovení ohniskové vzdálenosti tenké čočky z příčného zvětšení

Podle obr. 8.2 pro příčné zvětšení platí

$$\beta = \frac{y'}{y} = \frac{a'}{a}. \tag{8.5}$$



Obrázek 8.3: Besselova metoda měření ohniskové vzdálenosti.

Rovnici (8.4) přepíšeme do tvaru

$$f' = \frac{a'}{1-\beta} = \frac{a\beta}{1-\beta}. \tag{8.6}$$

Zvětšení β určíme tak, že na stínítku změříme určitou část osvětleného milimetrového měřítka. K změřenému β přiřadíme odpovídající vzdálenost a nebo a'. Z rovnice (8.6) vypočítame ohniskovou vzdálenost. Z hlediska dosažení maximální přesnosti je vhodné volit vzdálenost a co největší, na druhé straně bereme zřetel na to, aby obraz byl dostatečně velký, aby zvětšení bylo dobře měřitelné.

Stanovení ohniskové vzdálenosti tenké spojky Besselovou metodou

Uvažujeme uspořádání podle obr. 8.3. Vzdálenost d předmětu od stínítka ponecháme pevnou. Dá se ukázat, že pro $d > 4f$ existují dvě polohy spojky, ve kterých se na stínítku vytvoří ostrý obraz. Vzhledem k tomu, že polohy předmětu a obrazu mohou být vzájemně vyměněny,

$$a_1 = -a_2', \qquad a_2 = -a_1' \tag{8.7}$$

a dále platí (viz obr. 8.3)

$$d = |a_1| + |a_1'| = |a_2| + |a_2'| \tag{8.8}$$

$$\Delta = |a_1'| - |a_2'| = |a_2| - |a_1|. \tag{8.9}$$

Pak ze vztahů (8.7)-(8.9) lze odvodit, že

$$d^2 - \Delta^2 = 4a_1a_1' = 4a_2a_2'. \tag{8.10}$$

Dosadíme-li do vztahu (8.4) za čitatele aa' ze vztahu (8.10) a za jmenovatele d ze vztahu (8.8), dostaneme vztah pro určení ohniskové vzdálenosti

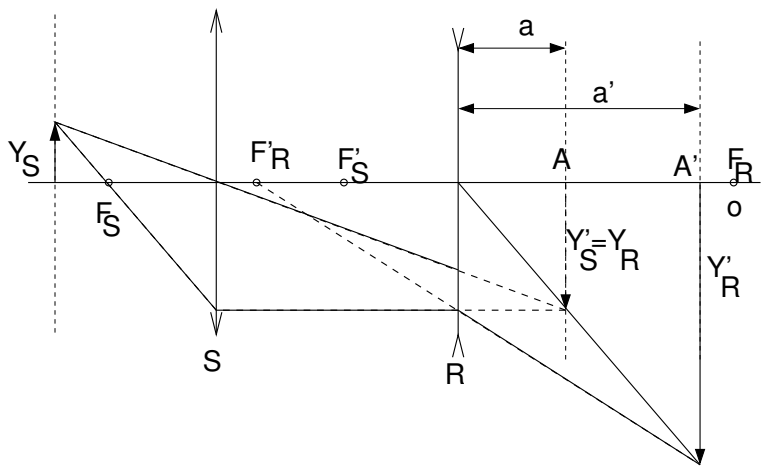
$$f' = \frac{d^2 - \Delta^2}{4d}. \tag{8.11}$$

Stanovení ohniskové vzdálenosti tenké rozptylky

Rozptylky vytvářejí vždy neskutečný obraz skutečného předmětu nebo naopak skutečný obraz neskutečného předmětu. Proto je v tomto případě nutno postupovat tak, že k měřené rozptylce se přidá spojka tak, aby obraz vytvořený spojkou mohl být neskutečným předmětem pro rozptylku. Podle obr. 8.4 umístíme na optickou lavici předmět y_s, a spojkou S vytvoříme reálný obraz y_s', v bodě A. Mezi tento obraz a spojku umístíme rozptylku R a na stínítku zase nalezneme ostrý obraz y_r' v bodě A'. Obraz y_s' je vlastně předmětem y_r pro rozptylku. Známe-li polohu rozptylky R, polohu obrazu spojky A a polohu obrazu roztylky A', můžeme vypočítat

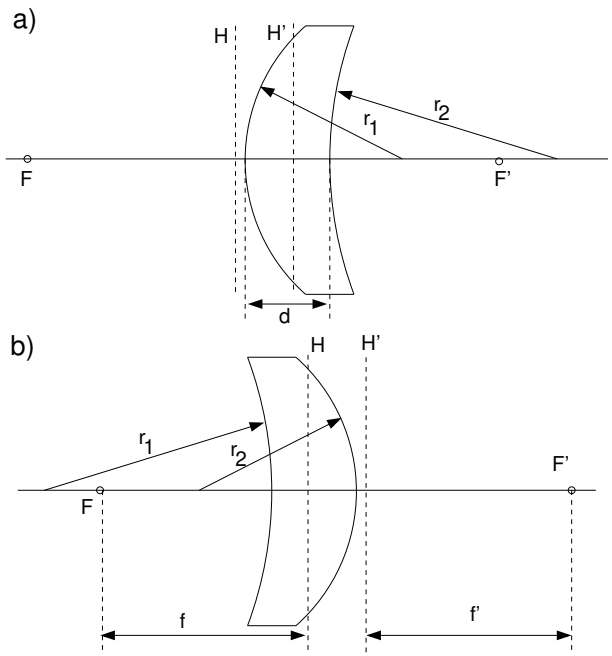
$$a = A - R \qquad a' = A' - R \tag{8.12}$$

a pro výpočet ohniskové vzdálenosti rozptylky použít vztah (8.4).



Obrázek 8.4: Měření ohniskové vzdálenosti rozptylky.

Určení indexu lomu čoček z ohniskové vzdálenosti a měření křivosti



Obrázek 8.5: Základní parametry tlusté čočky.

Index lomu určíme ze vztahu [3]

$$\frac{1}{f'} = (n-1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) + \frac{d\,(n-1)^2}{n\,r_1\,r_2}\,, \tag{8.13}$$

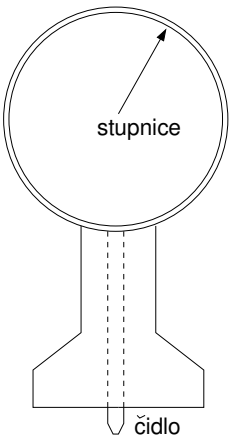
kde f' je ohnisková vzdálenost, r_1, r_2 poloměry kulových ploch, n index lomu a d tloušťka čočky. Na obr. 8.5 jsou vyznačeny tyto parametry pro různé polohy čočky. Vztah (8.13) předpokládá použití znaménkové konvence, která je popsaná v předchozí části.
Obrázek 8.5 představuje tlustou spojnou čočku s jednou stranou vypuklou a druhou vydutou, která se často používá v brýlové optice. Na obr. 8.5 jsou uvedeny dvě polohy stejné čočky, kdy $r_1 > 0$ a $r_2 > 0$ (schéma (a)) a $r_1 < 0$ a $r_2 < 0$ (schéma (b)). V obecném případě se můžeme setkat

s čočkami s oběma stranami vypuklými či oběma vydutými, případně s jednou stranou ploskou. V každém případě se však držíme znaménkové konvence, ve které je znaménko poloměru křivosti bylo záporné je-li střed křivosti plochy nalevo od vrcholu čočky a kladné v opačném případě. Pro rozptylku s oběma stranami vydutými je $r_1 < 0$ a $r_2 > 0$, pro spojku s oběma stranami vypuklými $r_1 > 0$ a $r_2 < 0$.
V našem případě se omezíme případ tenké čočky ($d \ll r_1, r_2$) nebo čočky s jednou stranou ploskou ($r_1 \to \infty$ nebo $r_2 \to \infty$). Potom se vztah (8.13) značně zjednodušší eliminací posledního členu

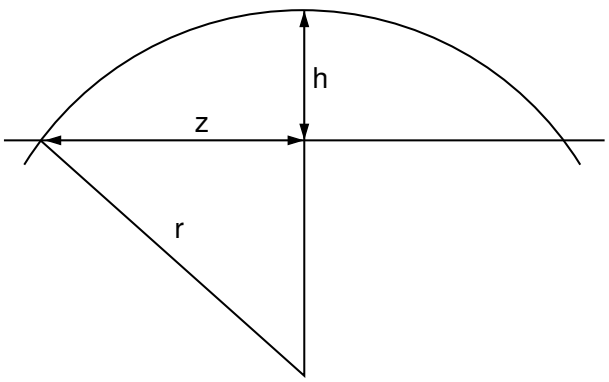
$$\frac{1}{f'} = (n-1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) . \tag{8.14}$$

Index lomu pak můžeme vypočíst přímo jako

$$n = 1 + \frac{1}{f'} / \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) . \tag{8.15}$$



Obrázek 8.6: Sférometr.



Obrázek 8.7: Určení poloměru křivosti kulové plochy.

Měření křivosti lámavých ploch sférometrem

Poloměry křivosti lámavých ploch r_1 a r_2 určíme sférometrem. Schéma mechanického sférometru je nakresleno na obr. 8.6. Hodinkový indikátor s přesností čtení rozdílu výšek ±0,01 mm je upevněn v držáku s kruhovou základnou, jehož středem prochází dotykové čidlo. Nulovou polohu sférometru určíme tak, že jej umístíme na rovinné sklo. Pak postavíme sférometr na měřenou kulovou plochu s poloměrem křivosti r. Z obr. 8.7 je zřejmé, že kruhová základna sférometru s poloměrem z vytne na povrchu měřené plochy kulovou úseč s výškou h. Rozdíl údajů sférometru na čočce a na rovinném skle právě udává tento parametr. Změříme-li průměr sférometru $2z$ posuvným měřítkem, pak zřejmě

$$r = \frac{z^2 + h^2}{2h} . \tag{8.16}$$

Úkoly

1. Změřte ohniskovou vzdálenost tenké spojky přímou metodou.
2. Změřte ohniskovou vzdálenost téže spojky ze zvětšení.
3. Změřte ohniskovou vzdálenost téže spojky Besselovou metodou.

4. Změřte ohniskovou vzdálenost rozptylky přímou metodou.
5. Porovnejte výsledky měření v bodech 1, 2 a 3 mezi sebou.
6. Změřte posuvným měřítkem vnitřní i vnější poloměr sférometru z_1, z_2. Sférometrem pak změřte výšku kulové úseče h pro každou stranu všech čoček z předchozí části úlohy. Měření opakujte 5 až 10-krát a statisticky zpracujte.
7. Vypočítejte index lomu měřených čoček podle vztahu (8.15). Určete nejistotu indexu započtením nejistoty ohniskové vzdálenosti f', výšky kulové úseče h a poloměru úseče z[15].

Pozn.: Soubor náhodných hodnot ohniskových vzdálenosti dostaneme tak, že pro každé měření nastavíme jinou polohu čočky v úkolech 1, 2 a 4 a jinou hodnotu vzdálenosti mezi zdrojem a stínítkem v úkolu 3. Pro každou metodu opakujte měření 5 až 10-krát.

Literatura k úloze 8

[1] J. Brož a kol.: *Základy fyzikálních měření I.* SPN Praha, 1983.

[2] A. Kučírková, K. Navrátil: *Fyzikální měření I.* SPN Praha, 1986.

[3] P. Malý: *Optika*, Karolinum, Praha, 2008.

[15] Uveďte do protokolu k hodnotě indexu lomu spojky, jaká byla použita hodnota ohniskové vzdálenosti.

Ústav fyziky kondenzovaných látek
Přírodovědecká fakulta, Masarykova univerzita, Brno

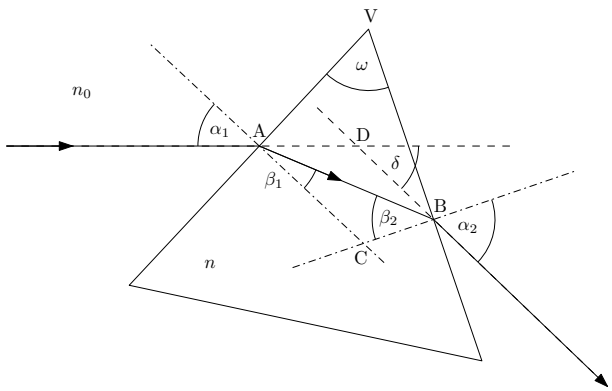
Fyzikální praktikum 2

9. Závislost indexu lomu skla na vlnové délce

Měření závislosti indexu lomu skla na vlnové délce metodou minimální deviace

Úvod

Metodu minimální deviace lze použít ke stanovení indexu lomu vzorků (sklo, plasty, atd.), které mají tvar hranolu. Při experimentu dvě sousední stěny hranolu, kterými vstupuje a vystupuje paprsek, spolu svírají lámavý uhel ω (viz obr. 9.1), jenž spolu s indexem lomu tvoří parametry hranolu. Paprsek vystupující z hranolu je od vstupujícího paprsku odchýlen o úhel δ, nazývaný deviace, který závisí na úhlu dopadu α_1. Po analýze této závislosti zjistíme, že pro určitý úhel dopadu vykazuje deviace minimum, δ_m.



Obrázek 9.1: Průchod paprsku světla hranolem.

Nyní odvoďme závislost úhlové odchylky δ vystupujícího paprsku na úhlu dopadu $\alpha_1 = \alpha$, lámavém úhlu ω a na indexu lomu skla n a uvažme její průběh. Zákon lomu na prvním rozhraní je

$$n_0 \sin\alpha = n \sin\beta_1, \tag{9.1}$$

kde n_0 je index lomu prostředí obklopující hranol, a na druhém rozhraní

$$n \sin\beta_2 = n_0 \sin\alpha_2 \tag{9.2}$$

Deviace δ je vnější úhel v trojúhelníků ABD při vrcholu D a tedy můžeme napsat

$$\delta = (\alpha - \beta_1) + (\alpha_2 - \beta_2). \tag{9.3}$$

Lámavý úhel ω je vnějším úhlem při vrcholu C v trojúhelníku ABC, neboť strana AC je kolmá k prvnímu rozhraní AV a strana BC je kolmá k druhému rozhraní BV, tedy:

$$\omega = \beta_1 + \beta_2. \tag{9.4}$$

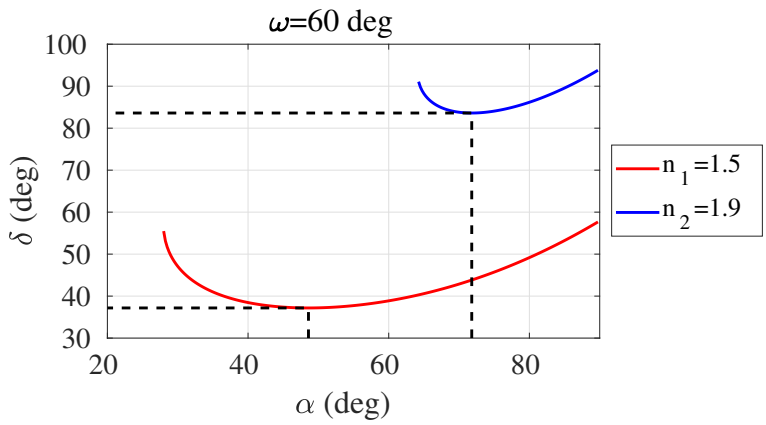
Deviace δ je pak podle (9.3) a (9.4) rovna

$$\delta = \alpha + \alpha_2 - \omega. \tag{9.5}$$

Vyjádříme–li α_2 ze vztahů (9.1), (9.2), (9.4) a (9.5), obdržíme závislost deviace na úhlu dopadu α ve tvaru

$$\delta = f(\alpha,\, \omega,\, n,\, n_0) = \alpha - \omega + \arcsin\left[\sin\omega\sqrt{\left(\frac{n}{n_0}\right)^2 - \sin^2\alpha} - \cos\omega\sin\alpha\right]. \tag{9.6}$$

Tato závislost má pro realistické případy indexu lomu skla n a vrcholových úhlů ω jedno minimum



Obrázek 9.2: Závislost deviace paprsku na úhlu dopadu na stěnu hranolu pro indexy lomu hranolu $n_1 = 1.5$ (červená čára) a $n_2 = 1.9$ (modrá čára) vykreslená pro úhly dopadu pro něž je realizovatelný průchod paprsku přes výstupní stěnu hranolu. Závislost je vynesena pro vrcholový úhel $\omega = 60\,°$. Přerušované čáry vyznačují polohy příslušných minim deviace paprsku.

(viz obr. 9.2). Odvození podmínky pro minimum deviace z (9.6) je poněkud zdlouhavé. Elegantněji dojdeme k výsledku s použitím vztahu (9.5)[3], jehož derivace podle α musí být v minimu nutně rovna 0, tedy

$$\frac{\mathrm{d}\delta}{\mathrm{d}\alpha} = 1 + \frac{\mathrm{d}\alpha_2}{\mathrm{d}\alpha} = 0. \tag{9.7}$$

Diferencováním Snellova zákona pro první a druhou lámavou plochu, tj. rovnicí (9.1) resp. (9.2), obdržíme

$$n_0 \cos\alpha\, \mathrm{d}\alpha = n \cos\beta_1\, \mathrm{d}\beta_1$$

a

$$n_0 \cos\alpha_2\, \mathrm{d}\alpha_2 = n \cos\beta_2\, \mathrm{d}\beta_2.$$

Podělením těchto dvou rovnic a s použitím diferencované formy vztahu (9.4), $\mathrm{d}\beta_1 = -\mathrm{d}\beta_2$, dostáváme

$$\frac{\mathrm{d}\alpha_2}{\mathrm{d}\alpha} = -\frac{\cos\alpha \cdot \cos\beta_2}{\cos\alpha_2 \cdot \cos\beta_1}. \tag{9.8}$$

Po dosazení do podmínky pro minimum (9.7) a s využitím Snellova zákona obdržíme

$$\frac{1 - \sin^2\alpha}{1 - \sin^2\alpha_2} = \frac{\frac{n}{n_0} - \sin^2\alpha}{\frac{n}{n_0} - \sin^2\alpha_2}. \tag{9.9}$$

Úhel dopadu α, pro který je tato rovnost splněna tedy vede k nutné podmínce minima deviace δ, $\frac{\mathrm{d}\delta}{\mathrm{d}\alpha} = 0$. Protože je $\frac{n}{n_0} > 0$, z rovnice (9.9) vyplývá, že úhel dopadu na hranol se rovná úhlu

výstupu $\alpha = \alpha_2$ a tedy $\beta_1 = \beta_2$. To znamená, že paprsek, pro který je deviace minimální, prochází hranolem symetricky vzhledem k rovině půlící vrcholový úhel hranolu (tj. úhel ω při vrcholu V na obr. 9.1). Po dosazení do (9.5) a (9.4) obdržíme $\alpha = \frac{\delta_\mathrm{m}+\omega}{2}$ resp. $\beta_1 = \frac{\omega}{2}$ a pod dosazení do Snellova zákona (9.1) pří aproximaci $n_0 \approx 1$ pro vzduch dostáváme vztah svazující index lomu materiálu hranolu s vrcholovým úhlem a minimální deviací δ_m

$$n = \frac{\sin([\delta_\mathrm{m} + \omega]/2)}{\sin(\omega/2)}. \tag{9.10}$$

Vrcholový úhel hranolu a minimální deviace jsou experimentálně relativně lehko měřitelné veličiny a nyní vidíme, že z nich můžeme určit i index lomu, aniž bychom potřebovali určovat navíc úhel dopadu α.

Index lomu látek je závislý na vlnové délce světla. Tomuto jevu se říká disperze a je způsobená závislostí rychlosti šíření monochromatické elektromagnetické vlny v látce na její frekvenci. Disperze je příčinou existence tzv. rozkladu světla hranolem, o kterém se můžeme přesvědčit osvětlíme-li hranol paprskem bílého světla, nebo světlem z výbojky. Pozorujeme, že největší deviaci mají paprsky s barvou fialovou a nejmenší s barvou červenou. Tedy s rostoucí vlnovou délkou deviace klesá, a protože podle (9.10) nebo (9.6) většímu indexu lomu odpovídá větší deviace, klesá index lomu s rostoucí vlnovou délkou. Tato závislost se nazývá normální disperze látky a její znalost je významná z hlediska použití dané látky pro optické účely. Naším úkolem bude zjistit tuto závislost pro sklo, ze kterého je vyroben hranol, tj. určit disperzní křivku hranolu. Teoreticky disperzi můžeme popsat pomocí Cauchyho vztahu:

$$n(\lambda) = A + \frac{B}{\lambda^2} + \frac{C}{\lambda^4}. \tag{9.11}$$

V aplikacích je třeba přihlížet k celé řadě fyzikálních parametrů skel optických elementů (např. čoček nebo hranolů) charakterizujících jejich optické a mechanické vlastnosti. Dvěma hlavními optickými parametry uváděnými v technických specifikacích komerčně dostupných skel jsou index lomu skla n_d pro žlutou čáru d z Fraunhoferových čar a Abbeovo číslo [3] (viz obr. 9.3). Žlutá čára d o vlnové délce $\lambda_\mathrm{d} = 587,6\,\mathrm{nm}$ je zvolena proto, že se nachází přibližně uprostřed intervalu vlnových délek viditelného spektra (tj. 380 nm až 750 nm). Abbeovo číslo, které je převrácenou hodnotou disperzní mohutnosti skla [3], je definované jako

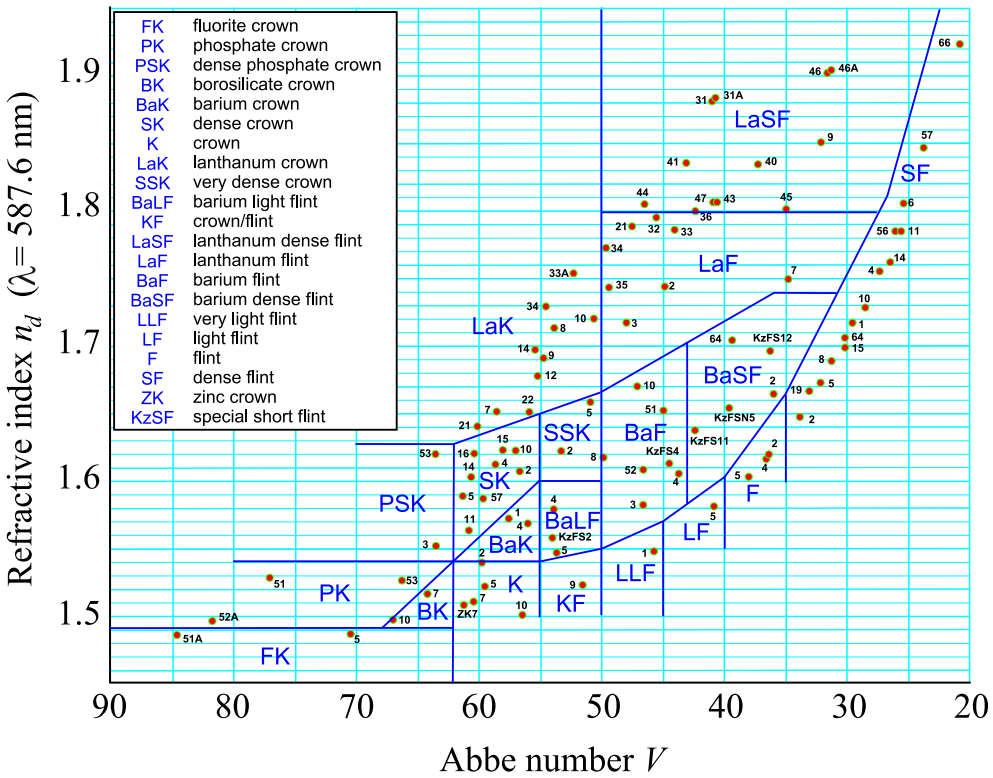
$$\nu_\mathrm{d} = \frac{n_\mathrm{d} - 1}{n_\mathrm{F} - n_\mathrm{C}}, \tag{9.12}$$

kde n_F a n_C jsou indexy lomu skla pro Fraunhoferovy čáry o vlnových délkách $\lambda_F = 486,1\,\mathrm{nm}$ (modrá) resp. $\lambda_C = 656,3\,\mathrm{nm}$ (červená). Abbeovo číslo je nepřímo úměrné rozdílu indexů lomů světla na opačných stranách viditelného spektra. Tedy, čím je Abbeovo číslo skla menší, tím více se mění index lomu s vlnovou délkou světla, a tím bude také větší chromatická vada čočky z daného skla vyrobené.

Experiment

Pomocí goniometru změříme potřebné úhly: lámavý úhel ω hranolu a úhel δ_m minimální deviace paprsků. Zdrojem světla bude rtuťová výbojka, která ve viditelné oblasti spektra obsahuje řadu čar o známých vlnových délkách uvedených v tabulce 9.1. Polohu paprsku budeme určovat vizuálně pomocí nitkového kříže umístěného v ohniskové rovině okuláru dalekohledu, do kterého zobrazíme vstupní štěrbinu kolimátoru osvětlenou výbojkou při měření úhlu minimální deviace.

Vlastní měření se provádí na goniometru SG-5, který má pevné rameno s kolimátorem a otočný stolek s měřeným hranolem. Polohu stolku a dalekohledu lze velmi přesně nastavit hrubým a jemným posuvem a číst ji s přesností jednotek úhlových vteřin. Způsob manipulace a odečítání úhlů na stupnici je popsáno v návodu na obsluhu tohoto goniometru. Před měřením je třeba provést justování hranolu, které spočívá v nastavení lámavých ploch kolmo na optickou osu dalekohledu.

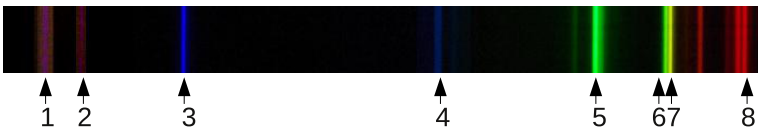


Obrázek 9.3: Abbeův diagram zobrazující Abbeovo číslo (zde V) oproti indexu lomu žluté spektrální čáry n_d pro sérii různých typů skel (číslované tečky). Skla jsou klasifikována podle Schottova kódu, který odráží jejich složení (písmenná část kódu) a polohu v diagramu (číselná část kódu). Zdroj [4].

Provádí se nakláněním stolečku regulačními šrouby. Kolmost se kontroluje autokolimační metodou: nitkový kříž osvětlený žárovkou v okuláru se po odrazu od justované lámavé plochy hranolu zobrazí zpět do ohniskové roviny okuláru dalekohledu. Při ztotožnění nitkového kříže se svým obrazem je lámavá plocha kolmá k optické ose dalekohledu. Postup opakujeme několikrát.
Měření lámavého úhlu ω hranolu provádíme tak, že změříme úhel, který spolu svírají paprsky kolmé k lámavým plochám. Je-li úhel mezi kolmicemi $\psi_1 - \psi_2$, je lámavý úhel

$$\omega = 180 - (\psi_1 - \psi_2). \tag{9.13}$$

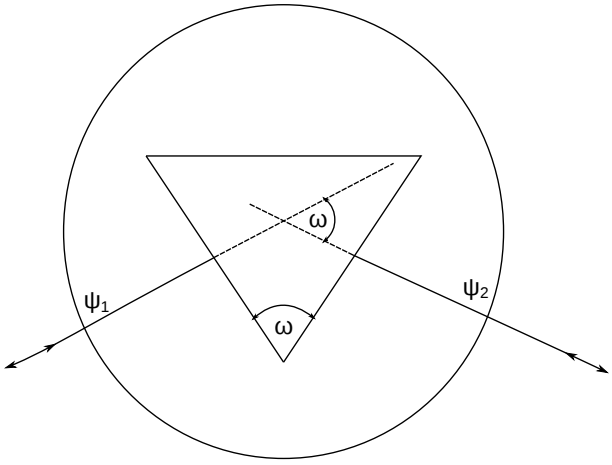
Úhlové polohy dalekohledu ψ_1 a ψ_2, kdy je optická osa dalekohledu kolmá na první resp. druhou lámavou plochu hranolu, nastavíme užitím autokolimační metody. Úhly ψ_1 a ψ_2 pak odečítáme na stupnici spojené s jednou z os rotace stolečku pozorované přes mikroskop umístěný na spodní části dalekohledu. Při měření otáčíme dalekohledem z polohy ψ_1 do polohy ψ_2, aniž bychom otáčeli stolečkem s hranolem (viz obr. 9.5). Pro zvýšení přesnosti určení ω a určení nejistoty provádíme měření několika dvojic úhlů ψ_1, ψ_2.
Měření úhlu minimální deviace δ_m provádíme pro každou spektrální čáru rtuti v bodě obratu paprsku. Minimální deviaci najdeme tak, že měníme úhel dopadu světla z výbojky na hranol



Obrázek 9.4: Upravená fotografie spektra rtuťové výbojky. Očíslovány jsou čáry, jejichž vlnové délky jsou uvedeny v tabulce 9.1.

Tabulka 9.1: Vlnové délky vybraných čar spektra rtuťové výbojky.

Vlnová délka (nm)	barva	poznámka	označení v obrázku 9.4
404,7	fialová	silnější	1
407,8	fialová	slabší	2
435,8	modrá	silná	3
491,6	modrozelená	jasná	4
546,1	zelená	silná	5
576,9	žlutá	silná	6
579,1	žlutá	silná	7
585,9	oranžová	slabá	
607,3	červená	slabá	
623,4	červená	silná	8
690,7	červená	slabá	

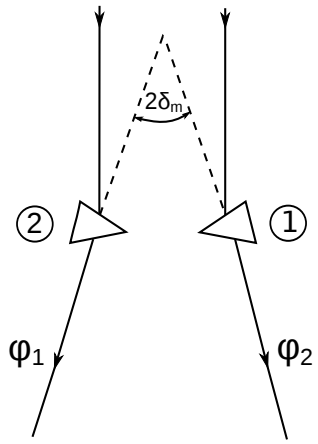


Obrázek 9.5: Měření lámavého úhlu hranolu.

otáčením stolečku s hranolem a pozorujeme pohyb dané spektrální čáry. Zatímco stolečkem otáčíme stále v určitém zvoleném směru, směr pohybu spektrální čáry vystupující z hranolu se v bodě minimální deviace obrátí (tj. deviace se nejdříve zmenšuje a pak zvětšuje). Bod obratu pohybu spektrální čáry nejlépe přibližně nalezneme prostým okem a až poté zpřesníme určení jeho polohy při pozorování dalekohledem. Nicméně, nemůžeme změřit úhlovou polohu paprsku vstupujícího do hranolu (museli bychom sejmout hranol), a tedy nelze určit minimální deviaci z rozdílu úhlu mezi vstupujícím a vystupujícím paprskem. Proto postupujeme tak, že změříme úhlovou polohu ϕ_1 vystupujícího paprsku v bodě minimální deviace při jeho vstupu do hranolu první lámavou plochou, pak otočíme stolek s hranolem tak, aby paprsek vstupoval do hranolu druhou lámavou plochou a změříme polohu vystupujícího paprsku ϕ_2 v bodě minimální deviace při obráceném směru průchodu paprsku hranolem (viz obr. 9.6). Stolkem s hranolem přitom otáčíme v ose, která není spojená s rotací úhlové stupnice, abychom mohli určit rozdíl úhlů. Rozdíl těchto úhlů je dvojnásobek minimální deviace [1]:

$$\delta_{\mathrm{m}} = (\phi_1 - \phi_2)/2 \tag{9.14}$$

Při měření postupujeme tak, že nejdříve změříme pro všechny zvolené spektrální čáry polohy ϕ_1, pak hranol otočíme a měříme polohy ϕ_2 u stejných spektrálních čar.
Index lomu pro každou spektrální čáru vypočítáme ze vztahu (9.10). Příslušnou vlnovou délku najdeme v tabulce 9.1 nebo přímo v tabulkách [2].



Obrázek 9.6: Měření úhlu minimální deviace z rozdíl úhlů ϕ_1 a ϕ_2, pod kterými pozorujeme paprsky vystupující z hranolu při vstupu přes první resp. druhou lámavou stěnu (poloha hranolu 1 resp. 2).

Úkoly

1. Měřený hranol postavte na stoleček goniometru tak, aby jeho lámavé plochy byly zhruba proti stavěcím šroubům.
2. Proveďte justování hranolu metodou zrcadlení nitkového kříže.
3. Změřte několikrát lámavý úhel hranolu a výsledky statisticky zpracujte.
4. Změřte úhly minimální deviace alespoň pro pět spektrálních čar rtuti v obou polohách hranolu.
5. Vypočítejte index lomu ze vztahu (9.10) pro každou spektrální čáru a pomocí tabulky 9.1 nebo [2] jí přiřaďte vlnovou délku λ.
6. Vyneste do grafu závislost indexu lomu na vlnové délce světla a proložte ji Cauchyho vztahem (9.11) omezeným do kvadratického členu rozvoje

$$n(\lambda) = A + \frac{B}{\lambda^2}.^{16} \tag{9.15}$$

   Hodnoty koeficientů A a B Cauchyho rozvoje explicitně uveďte včetně jednotek a nejistot.
7. Na základě obdrženého Cauchyho vztahu pak určete indexy lomu pro vlnové délky Fraunhoferových čar F, d a C a z nich pak určete Abbeovo číslo ν_d skla měřeného hranolu. Výsledné hodnoty n_d a ν_d srovnejte hodnotami udávanými výrobcem nebo s tabelovnými hodnotami pro měřené optické sklo.

[16] Z výpočetního hlediska je nejvýhodnější provést proložení po provedení substituce $x = 1/\lambda^2$, čímž se úloha převede na lineární regresi $n = A + Bx$. Pro optické vlnové delky je vhodné používat jako jednotky x [μm^{-2}], neboť pak dostáváme na x-ové ose číselné hodnoty v řádu jednotek až desítek. Vykreslením závislosti indexu lomu n na nově zavedené proměnné x spolu s lineárním fitem pak můžeme rychle ověřit, zda je lineární model vhodný a zda se některé určené hodnoty n výrazně neodchylují od modelové přímky, což by naznačovalo chybu měření nebo ve výpočtu u daného měřícího bodu. Na druhou stranu, výrazná systematická odchylka experimentálně určené závislost $n(x)$ od přímky může naznačovat nutnost fitovat polynomem druhého řádu v x, tedy aplikovat i člen C/λ^4 v Cauchyho vztahu (9.11).

Literatura k úloze 9

[1] A. Kučírková a K. Navrátil: *Fyzikální měření 1*, SPN Praha 1986.

[2] J. Brož, V. Roskovec, M. Valouch: *Fyzikální a matematické tabulky*, str. 137, SNTL Praha 1980.

[3] E. Hecht: *Optics*, Addison Wesley, San Francisco, 2002.

[4] `https://en.wikipedia.org/wiki/Abbe_number`, graf vytvořil Eric Bajart, distribuováno na základě CC-BY 2.0 licence.

Ústav fyziky kondenzovaných látek
Přírodovědecká fakulta, Masarykova univerzita, Brno

Fyzikální praktikum 2

10. Polarizace světla

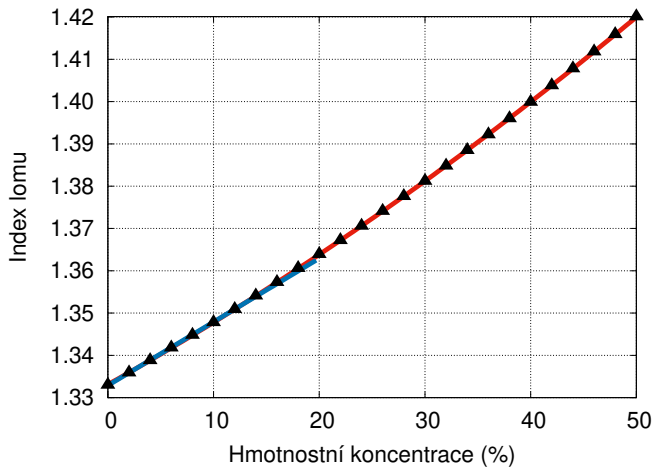
Úkoly k měření

- Příprava roztoku sacharózy.
- Určení koncentrace roztoku měřením indexu lomu dvouhranolovým refraktometrem.
- Měření optické stáčivosti roztoku sacharózy.
- Malusův zákon, měření polarizační schopnosti reálného polaroidu.

Měření indexu lomu a optické stáčivosti roztoku sacharózy

Látky rozpuštěné v roztoku ovlivňují mimo jiné jeho optické vlastnosti. Optická měření bývají rychlá, proto se často používají v analýzách roztoků. V této úloze budeme měřit závislost indexu lomu a optické stáčivosti roztoku sacharózy na koncentraci roztoku.

Závislost indexu lomu roztoku sacharózy na jeho koncentraci



Obrázek 10.1: Závislost indexu lomu roztoku sacharózy (body) pro žluté světlo sodíkové výbojky s vlnovou délkou 589 nm (podle [3, 4]). Červenou čarou je vynesen fit kvadratickou závislostí (10.3) a modrou lineární aproximace (10.4).

Hmotnostní koncentrace roztoků c_m se definuje

$$c_m = \frac{m_{\text{sach}}}{m_{\text{roz}}}, \tag{10.1}$$

kde m_{sach} je hmotnost rozpuštěné látky a m_{roz} je hmotnost roztoku. Po vynásobení stem dostaneme hodnotu v procentech. Pro malé koncentrace vodných roztoků se předpokládá, že

hustota roztoku se příliš neliší od hustoty vody $1\,\mathrm{g/cm^3}$ a hmotnost roztoku se nahradí jeho objemem

$$c = \frac{m_{\mathrm{sach}}\ (\mathrm{g})}{V_{\mathrm{roz}}\ (\mathrm{cm^3} = \mathrm{ml})} 100\ (\%), \tag{10.2}$$

kde hmotnost rozpuštěné látky m_{sach} dosazujeme v gramech a objem roztoku V_{roz} v kubických centimetrech čili mililitrech. Závislost indexu lomu vodného roztoku sacharózy na jeho koncentraci c podle [3] je vynesena na obrázku 10.1. Tuto závislost lze popsat kvadratickou formulí

$$n(c) = (1{,}3330 \pm 0{,}0003) + (0{,}00140 \pm 0{,}00003)\, c + (6{,}7 \pm 0{,}5) \times 10^{-6}\, c^2, \tag{10.3}$$

kde konstantní člen je roven indexu lomu vody n_{voda}. Pro malé koncentrace do 20 % můžeme s dostatečnou přesností použít i lineární vztah

$$n(c) = (1{,}3330 \pm 0{,}0003) + (0{,}00140 \pm 0{,}00003)\, c = n_{\mathrm{voda}} + (0{,}00140 \pm 0{,}00003)\, c. \tag{10.4}$$

Měření indexu lomu pomocí mezního úhlu

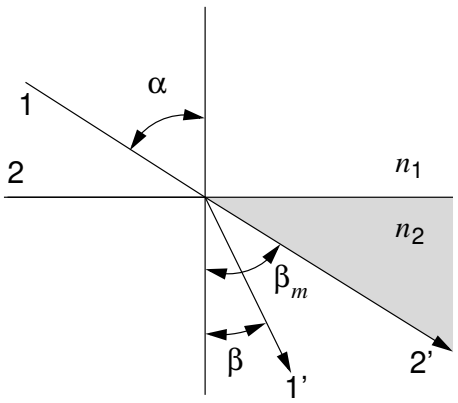
Index lomu pevných látek a kapalin lze snadno a s vysokou přesností zjistit měřením mezního úhlu při lomu, resp. odrazu na rozhraní dvou prostředí. Máme-li dvě prostředí (viz obr. 10.2), charakterizovaná indexy lomu n_1 a n_2 ($n_1 < n_2$) a prochází-li světlo z prostředí o indexu lomu n_1 do prostředí charakterizovaného indexem lomu n_2, nastává podle Snellova zákona lom paprsků ke kolmici. V mezním případě, kdy je úhel dopadu roven 90 stupňům (obr. 10.2, paprsek 2), se šíří světlo ve druhém prostředí pod největším možným úhlem β_m. Tedy do vyšrafované oblasti na obr. 10.2 nemůže světlo z prvního prostředí po lomu na rozhraní vnikat. Pro mezní úhel β_m dostáváme podle Snellova zákona

$$\sin \beta_m = \frac{n_1}{n_2}. \tag{10.5}$$

Na principu měření mezního úhlu jsou konstruovány refraktometry, kterými lze určit index lomu rychle a s použitím malého množství měřené látky (kapaliny).

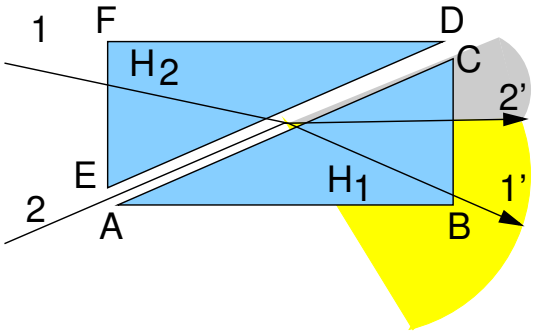
Dvouhranolový refraktometr

Základní částí přístroje jsou dva hranoly H_1 a H_2, zhotovené ze skla s vysokým indexem lomu (obr. 10.3). Měřící hranol H_1 má stěny AC a BC vyleštěny, strana AB je matná. Osvětlovací hranol H_2 má naopak matnou stěnu ED. Měřený objekt se umisťuje na plochu AC měřícího hranolu. Je-li měřen index lomu kapaliny, jsou oba hranoly k sobě přiklopeny a mezi ně se vpraví malé množství kapaliny. Chceme-li měřit index lomu pevné látky, musí mít vzorek alespoň jednu



Obrázek 10.2: Lom světelného paprsku na rozhraní dvou prostředí pro případ $n_2 > n_1$. Dále je vyznačen mezní úhel β_m a bílá je oblast, do níž světlo může procházet. Žádné světlo se neláme do šedě vyznačené oblasti.

plochu rovinnou a dobře vyleštěnou. Vzorek přiložíme touto plochou na stěnu AC, na kterou je třeba před měřením nanést malé množství kapaliny s indexem lomu vyšším než má měřená látka (obvykle 1-bromnaftalem, $n = 1{,}658$).



Obrázek 10.3: Optický princip dvojhranolového refraktometru. Při lomu z měřeného materiálu umístěného mezi hranoly na stěně AC hranolu H_1 se veškeré světlo láme do žlutě vyznačené výseče, šedá výseč je temná. Směr mezního paprsku 2', který odděluje světlou a temnou oblast, je dán indexem lomu měřeného materiálu umístěného mezi hranoly podle vztahu (10.5). Index lomu měřeného materiálu musí být menší než index lomu hranolu H_1, aby se světlo lámalo ke kolmici.

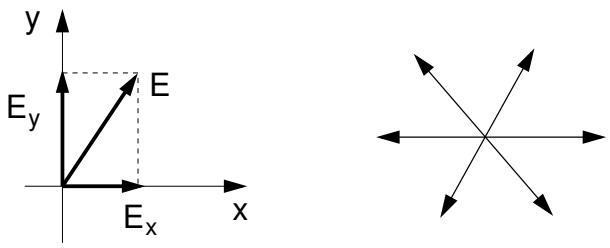
Při měření na průchod vstupuje světlo plochou EF do osvětlovacího hranolu, na ploše ED se rozptýlí a vchází do měřené látky. Po lomu vychází stěnou BC. Tato plocha je pozorována dalekohledem. Při měření v monochromatickém světle je mezi oběma částmi zorného pole ostré rozhraní. Při měření na odraz vstupuje světlo plochou AB do hranolu H_1 a po odrazu opět vychází plochou BC.
Je-li měření prováděno v bílém světle, je rozhraní v zorném poli dalekohledu zbarveno. Aby se tato obtíž odstranila, je dvojhranolový refraktometr vybaven kompenzátorem, což jsou dva Amiciovy hranoly. Činnost kompenzátoru spočívá v tom, že se do optické soustavy přístroje zařadí nový hranol, jehož disperze je až na znaménko rovna disperzi měřící soustavy.
S měřícím hranolem je pevně spojena stupnice kalibrovaná v hodnotách indexu lomu. Odečítá se na ní pomocí lupy umístěné vedle okuláru dalekohledu. Měření na tomto přístroji lze provádět buď v monochromatickém světle sodíkové výbojky (vlnová délka 589,3 nm) nebo ve světle bílém. Refraktometr má rovněž vedle stupnice indexu lomu dodatečnou stupnici pro měření koncentrace roztoku sacharózy.
Postup měření:

1. Měření provádějte pro všechny roztoky sacharózy a také pro destilovanou nebo demineralizovanou vodu. Odečtené hodnoty indexu lomu a koncentrace sachrózy pro čistou vodu se použijí pro kalibraci refraktometru, tj. jako počátek stupnice pro určení koncentrace sacharózy v roztocích.

2. Na měřící hranol nanést malé množství měřené kapaliny a přiklopit osvětlovací hranol.

3. Šroubem na pravé straně přístroje otáčet hranolem tak dlouho, až se v zorném poli dalekohledu objeví rozhraní světlo-tma. Toto rozhraní otáčením šroubu nastavit do průsečíku nitkového kříže v zorném poli dalekohledu.

4. Na stupnici vpravo lupou odečíst hodnotu indexu lomu měřené kapaliny a koncentraci roztoku sacharózy.



Obrázek 10.4: Polarizace denního světla.

Polarizace světla

Světlo je příčné vlnění elekromagnetického pole. Pro popis světelných jevů plně postačí se zaměřit na chování periodicky proměnného vektoru elektrického pole $\vec{E}$. Tento vektor je vždy kolmý ke směru šíření paprsku. Je-li směr vektoru $\vec{E}$ ve všech bodech paprsku v čase stálý, hovoříme o lineárně polarizovaném světle a rovina, v níž se kmity dějí, se nazývá kmitová rovina nebo rovina polarizace. Lineárně polarizované světlo můžeme dostat lomem nebo odrazem.
Je vhodné rozložit vektor elektrického pole $\vec{E}$ do dvou navzájem kolmých směrů a vyjádřit ho ve složkách E_x a E_y (obr. 10.4, přičemž se světelný paprsek šíří kolmo k rovině obrázku). Je-li fázový posuv δ mezi těmito složkami stálý a je-li zároveň roven nule, dostávame lineárně polarizované světlo. V případě, že $\delta = \pi/2$ a navíc platí $E_x = E_y$ opisuje koncový bod vektoru $\vec{E}$ kružnici a dostáváme kruhově polarizované světlo; v obecném případě, kdy $0 < \delta < \pi/2$ jde o elipticky polarizované vlnění.

Optická aktivita látek

Látky jsou opticky aktivní, mají-li schopnost stáčet rovinu lineárně polarizovaného světla. Tuto vlastnost mají jak některé látky pevné tak i některé roztoky obsahující v molekule např. asymetricky umístěný uhlík (vodný roztok sacharózy). Podle směru stočení kmitové roviny se opticky aktivní látky dělí na pravo- a levotočivé vzhledem k pozorovateli hledícímu proti směru šíření světla. Biot stanovil empirický vztah pro úhel stočení kmitové roviny po průchodu aktivní látkou,

$$\alpha = [\alpha]d \tag{10.6}$$

kde $[\alpha]$ je specifická stáčivost zkoumané látky a d je tloušťka této látky. Veličina $[\alpha]$ závisí na teplotě a vlnové délce světla. Jde-li o roztoky, pak

$$\alpha = [\alpha]cd \tag{10.7}$$

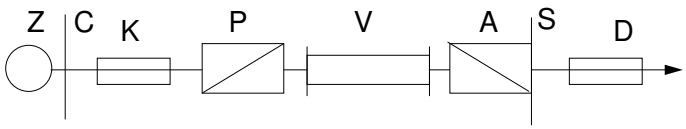
kde c označuje koncentraci opticky aktivní látky. Specifickou stáčivost roztoku lze stanovit ze vztahu (10.7) polarimetrem:

$$[\alpha] = \frac{100\alpha}{dq}, \tag{10.8}$$

kde q je počet gramů látky ve 100 cm^3 roztoku.

Tabulka 10.1: Specifická stáčivost vybraných látek.

látka	specifická stáčivost (°cm^3/g.dm)
Sacharóza	+66,53
Fruktóza	−93,78
Dextróza (D-glukóza)	+52,74



Obrázek 10.5: Polarimetr.

Polarimetr

Polarimetr slouží k měření úhlu stočení roviny polarizace studovanou látkou (kapalnou, pevnou či plynnou). Polarimetr je znázorněn na obr. 10.5. Světlo z monochromatického zdroje (Z) je kolimátorem (K) zpracováno na rovnoběžný svazek paprsků. Průchodem přes polarizátor (P) se vlnění lineárně polarizuje a buď prochází přes měřený vzorek (V) nebo jde přímo na analyzátor (A), kterým lze otáčet kolem optické osy přístroje. Výsledná intenzita prošlého světla se pozoruje dalekohledem (D). Polarizátor a analyzátor jsou zpravidla realizovány pomocí speciálních hranolů z opticky anizotropních krystalů. Zkřížíme-li kmitové roviny polarizátoru a analyzátoru, bude intenzita osvětlení zorného pole minimální. Naše oči pozorují minimum osvětlení dosti nepřesně a nespolehlivě, naopak jsou citlivé na kontrast v osvětlení dvou sousedních ploch. Tohoto poznatku se využívá při konstrukci tzv. polostínového zařízení analyzátoru [1, 2], kde se snažíme dosáhnout otáčením analyzátoru takového stavu, při kterém jsou obě poloviny zorného pole osvětleny stejně (málo). Úhel stočení analyzátoru vůči polarizátoru se měří na stupnici (S).

Měření

Připravíme asi 25 cm^3 15% roztoku sacharózy a nalijeme do kyvety. Zbytek roztoku zředíme tak, abychom získali 10% roztok sacharózy a znovu odlejeme do druhé kyvety. Postup ještě jednou zopakujeme tak, aby ve třetí kyvetě byl 5% roztok sacharózy.
Zapneme výbojku před polarimetrem. Otáčením analyzátoru nastavíme polostín a odečteme na stupnici nulovou polohu (pozor na správnou stupnici). Kyvetu s roztokem vložíme do přístroje a opět najdeme polostín a na stupnici odečteme úhel stočení. Ze vztahu (10.8) určíme specifickou stáčivost, měření opakujeme alespoň 5×.

Úkoly

1. Připravte tři roztoky sacharózy o různé koncetraci (15 %, 10 %, 5 %).
2. Na dvouhranolovém refraktometru určete index lomu každého z roztoků sacharózy a také čisté vody.
3. Odečtěte odpovídající koncentraci sacharózy odečtením v refraktometru nebo ji určete podle vztahu (10.4), grafu 10.1 nebo z tabulek [4].
4. Určete polarimetrem úhel stočení kmitové roviny připravených roztoků. Měření všech kyvet opakujte 5×, vždy ve schematu: nulová poloha – první kyveta – druhá kyveta – třetí kyveta.
5. Vypočítejte specifickou stáčivost sacharózy a porovnejte ji s tabelovanou hodnotou, kterou najdete např. v [2], str. 571 nebo v tabulce 10.1.

Malusův zákon, měření polarizační schopnosti reálných polaroidů

Úvod

Zdroje světla si lze představit jako soubor velkého množství vzájemně nezávislých zdrojů elektromagnetického záření (atomy, molekuly). Světlo vyzařované např. jedním atomem je lineárně

polarizované tzn. že vektor intenzity elektrického pole $\vec{E}$ se v čase mění v přesně definované rovině – rovině kmitové. V daném okamžiku se ale ve směru šířícího se paprsku světla šíří energie vyzařovaná mnoha elementárními zdroji. V tomto případě jsou v postupující vlně zastoupeny všechny možné kmitové roviny, hovoříme o přirozeném světle.
Z přirozeného světla můžeme dostat lineárně polarizovanou vlnu pomocí polarizačních přístrojů– polarizátorů. Při odrazu světla na dielektrickém rozhraní závisí odrazivost různě polarizovaných složek na úhlu dopadu podle Fresnelových vztahů. Tento jev je studován v úloze 7. Plně polarizované světlo lze získat při odrazu pod Brewsterovým úhlem. Také světlo po lomu na rozhraní je částečně polarizováno. Klasické polarizátory (Nikolův hranol) využívají dvojlomu v některých krystalech, kdy index lomu závisí na polarizaci. Různě polarizované složky se pak šíří pod různými směry a jednu z nich lze eliminovat při totálním odrazu na jiné stěně hranolu. V současné době se nejvíce používají polarizační fólie (polaroidy) tvořené uspořádanými polymerními vlákny. Propustnost folie je závislá na polarizaci světla. Při vhodné volbě materiálu a tloušťky lze připravit polarizační folie s vysokou účinností.

Malusův zákon

Na obrázku 10.6 označuje P polarizátor, A analyzátor, I_0 je intenzita přirozeného světla dopadajícího na polarizátor, I_0' je intenzita světla po průchodu polarizátorem. Dále je I intenzita svazku, který prošel analyzátorem A a α je úhel mezi kmitovými rovinami vektoru $\vec{E}$ před a po průchodu analyzátorem. Označíme-li amplitudu vektoru $\vec{E}$ před průchodem analyzátorem a_0 a po průchodu a, pak podle předchozího obrázku platí

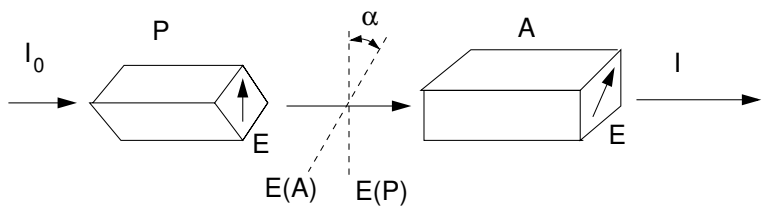
$$a = a_0 \cos\alpha. \tag{10.9}$$

Intenzita světla je úměrná druhé mocnině amplitudy, tedy intenzita prošlého světla analyzátorem je dána vztahem

$$I = I_0' \cos^2\alpha, \tag{10.10}$$

což je matematický zápis Malusova zákona. V případě nedokonalých polarizátorů bude část světla pronikat i při zkřížených polarizátorech. Malusův zákon pak můžeme upravit

$$I(\alpha) = I_{\min} + (I_{\max} - I_{\min})\cos^2\alpha. \tag{10.11}$$



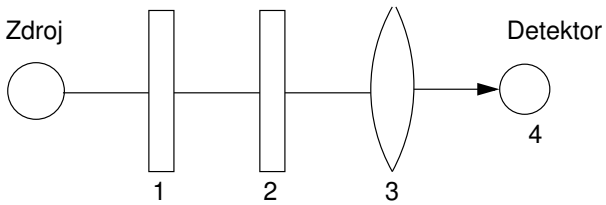
Obrázek 10.6: Schéma Malusova pokusu.

Ověření platnosti Malusova zákona

Využijeme uspořádání podle obr. 10.7 se dvěma polarizátory (Nikolovým hranolem a polarizační fólií) a světelný zdroj umístíme tak, aby světlo procházelo oběma polarizátory. Platnost Malusova zákona ověříme tak, že jeden z polarizátorů necháme v libovolné, ale stále stejné poloze a druhým budeme otáčet s pevným krokem v rozsahu 0° až 360°. Závislost fotoproudu na úhlu stočení obou polarizátorů by měla odpovídat závislosti dle vztahu (10.11). Tuto závislost můžeme ještě dále využít ke stanovení stupně polarizace světla. Částečně polarizované světlo si lze představit

složené z části polarizované (intenzita I_p) a části nepolarizované (I_n). Stupeň polarizace V částečně polarizovaného světla je dán vztahem

$$V = \frac{I_p}{I_p + I_n}. \tag{10.12}$$



Obrázek 10.7: Uspořádání pro ověření Malusova zákona. 1 – první polarizátor, 2 – druhý polarizátor, 3 – fokusační čočka, 4 – detektor.

Mějme dva polarizátory, z nichž první je nedokonalý (s nízkým stupněm polarizace) a druhý téměř dokonalý. Předpokládejme, že propustnost druhého polarizátoru pro světlo polarizované v polarizační rovině polarizátoru je rovna 1 a pro světlo polarizované kolmo k jeho polarizační rovině rovna 0. Testujeme stupeň polarizace prvního polarizátoru. Po průchodu polarizátorem č. 1 jsou intenzity polarizovaného světla $I_p^{(1)}$ a $I_n^{(1)}$. Jsou-li kmitové roviny obou polarizátorů rovnoběžné, dostaneme po průchodu světla oběma polarizátory intenzitu

$$I_{\max} = I_p^{(1)} + \frac{I_n^{(1)}}{2}, \tag{10.13}$$

protože linárně polarizovaná složka projde i druhým polarizátorem, ale z nepolarizované složky jen jedna polovina. Naopak, jsou-li kmitové roviny navzájem kolmé, pak projde přes druhý polarizátor pouze polovina z nepolarizované složky

$$I_{\min} = \frac{I_n^{(1)}}{2}. \tag{10.14}$$

Dosadíme-li $I_p^{(1)}$ a $I_n^{(1)}$ do vztahu (10.12), dostaneme pro stupeň polarizace vztah

$$V = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}. \tag{10.15}$$

Stupeň polarizace tedy určíme ze závislosti fotoproudu na úhlu stočení polarizátoru.

Úkoly

1. Měření provádějte v monochromatickém světle s vybraným barevným filtrem.
2. Jeden z polarizátorů nechejte v pevné poloze, druhým otáčejte.
3. Zaznamenávejte hodnoty fotoproudu na měřidle odpovídající nastaveným úhlům.
4. Vyneste závislost fotoproudu na úhlu otočení polarizátoru.
5. Ze vztahu (10.15) určete stupeň polarizace druhého polarizátoru.

Užití v praxi: Stáčení roviny polarizace je prakticky využitelné právě v relativně velmi přesné metodě měření koncentrace látek v roztoku (pokud jsou opticky aktivní). Aplikace polarizátorů jsou ovšem mnohem

širší – od polarizačních brýlí (včetně těch používaných při stereoskopických 3D projekcích) přes zobrazování pomocí LCD (opticky aktivní krystaly v elektrickém poli mezi dvěma zkříženými polarizátory) až po defektoskopii (opět zkoumání stáčení polarizace tentokrát vlivem pnutí v průhledném materiálu). Přímé užití Malusova zákona lze nalézt ve spojitě ztmavovatelných brýlích, nebo u rychlých elektricky ovládaných optických závěrek (podobně jako u tekutých krystalů se i zde řídí stáčení polarizace pomocí elektrického pole). Laboratorní zkoumání změn polarizace při odrazu na materiálech pak umožňuje určovat dielektrické funkce (i vícevrstevných vzorků) technikou zvanou elipsometrie.

Literatura k úloze 10

[1] A.Kučírková a K. Navrátil: *Fyzikální měření I*, SPN Praha 1986.

[2] Z. Horák: *Praktická fyzika*, SNTL Praha 1958.

[3] *CRC, Handbook of Chemisty and Physics*, editor D.R. Lide, str. 8–81, the 84th edition, CRC Press, 2003–2004.

[4] `http://www.refractometer.pl/refraction-datasheet-sucrose`

Ústav fyziky kondenzovaných látek
Přírodovědecká fakulta, Masarykova univerzita, Brno

Fyzikální praktikum 2

11. Interference a difrakce světla

Cíle praktika

1. Seznámit se s principy optické interferometrie.
2. Naučit se používat Michelsonův interferometr a použít ho za účelem
   - určení tloušťky tenké vrstvy,
   - určení indexu lomu vzduchu.
3. Seznámit se s principy difrakce a využít difrakci k určení hustoty vrypů optické mřížky.

Interference světla

Teoretický úvod

Index lomu

Ve vakuu se světlo pohybuje rychlostí

$$c_0 = 2{,}99792458 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}. \tag{11.1}$$

Pokud se světlo šíří dielektrickým prostředím (plyn, tekutina, sklo nebo jiná průhledná pevná látka), jeho rychlost se sníží na

$$c = \frac{c_0}{n}, \tag{11.2}$$

kde n je *index lomu*. Index lomu je důležitou charakteristikou prostředí, která navíc závisí na barvě, tj. vlnové délce λ světla, stejně jako na teplotě a tlaku. Poslední jmenovaná závislost je nejvíce výrazná pro plyny. Typické hodnoty jsou $n = 1{,}33$ pro vodu, $n = 1{,}4$ až $2{,}0$ pro různé typy skel, zatímco pro plyny (včetně vzduchu) je odchylka indexu lomu od jedničky $n - 1$ řádově 10^{-4}.

Rovinné monochromatické vlny

Světlo je (v rámci vlnového pojetí světla) elektromagnetická vlna, která je charakterizována elektrickým polem $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t)$, nazývaným optické pole, které závisí na čase t a polohovém vektoru v prostoru $\boldsymbol{r}$. Světlo vyzařované laserem lze v dobrém přiblížení popsat jako *rovinnou monochromatickou vlnu*. Uvažujeme-li takovou vlnu, která se šíří podél osy x, časová a prostorová závislost optického pole je dána vztahem

$$E(x, t) = E_0 \cos\left(kx - \omega t + \phi_0\right), \tag{11.3}$$

kde ω je úhlová frekvence, k je *úhlové vlnové číslo* a ϕ_0 je počáteční fáze (fázová konstanta). Úhlová frekvence a úhlové vlnové číslo jsou svázány vztahem

$$k = \frac{\omega}{c} = n\frac{\omega}{c_0} = nk_0, \tag{11.4}$$

kde

$$k_0 = \frac{\omega}{c_0} = \frac{2\pi\nu}{c_0} = \frac{2\pi}{\lambda_0} \tag{11.5}$$

je (úhlové) vlnové číslo ve vakuu a

$$\lambda_0 = \frac{c_0}{\nu} \tag{11.6}$$

je vlnová délka ve vakuu a ν je frekvence. Z tohoto výrazu je patrné, že se vlnová délka světla změní na

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{n}, \tag{11.7}$$

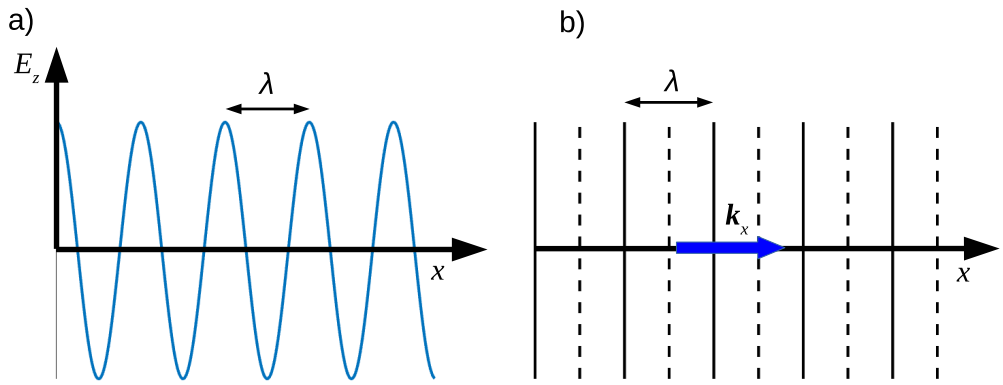
pokud se šíří prostředím s indexem lomu $n \neq 1$, zatímco frekvence ν světla se nezmění.

Reprezentace a šíření vlny

Uvažme rovinnou vlnu v čase $t = 0$ šířící se ve směru osy x

$$E(x) = E_0 \cos(kx), \tag{11.8}$$

kde $\Phi = kx$ se nazývá *prostorová fáze vlny.* Tato vlna může být graficky reprezentována funkcí $E(x)$ (viz obr. 11.1a)) nebo vlnoplochami, což jsou roviny kolmé na vlnový vektor $\boldsymbol{k}$ (obr. 11.1b)), jehož velikost je rovna úhlovému vlnovému číslu.



Obrázek 11.1: Grafické reprezentace elektromagnetické rovinné monochromatické vlny šířící se podél osy x pomocí a) funkce intenzity elektrického pole $E(x)$ a b) pomocí vlnoploch, které jsou rovinami kolmými k vlnovému vektoru $\boldsymbol{k}$ a vzájemně vzdálené o vlnovou délku λ.

Vlnoplochy prochází body prostoru, ve kterých optické pole $E(x)$ nabývá určité hodnoty. V našem případě jsme je reprezentovali spojitými čarami v bodech, kde $E(x)$ dosahuje svého maxima E_0 a přerušovanými čarami v bodech, kde funkce dosahuje minima $-E_0$. Sousední vlnoplochy odpovídající stejné hodnotě $E(x)$ (tj. zde maximům či minimům) jsou vzájemně vzdáleny o vlnovou délku λ. Šíření vlny prostorem by odpovídal pohyb obou reprezentací vlny na obr. 11.1 rychlostí c podél osy x. V bodě $x + \Delta x$, je prostorová fáze vlny (tj. argument funkce cos v (11.8))

$$\Phi = k(x + \Delta x) = kx + k\Delta x = kx + \Delta\Phi \tag{11.9}$$

a mluvíme o přírůstku fáze vlny vůči bodu x o

$$\Delta\Phi = k\Delta x = nk_0\Delta x \tag{11.10}$$

na dráze Δx. Zatímco Δx nazýváme *geometrickou dráhou,* $n\Delta x$ se nazývá *dráhou optickou.*

Intenzita rovinné vlny

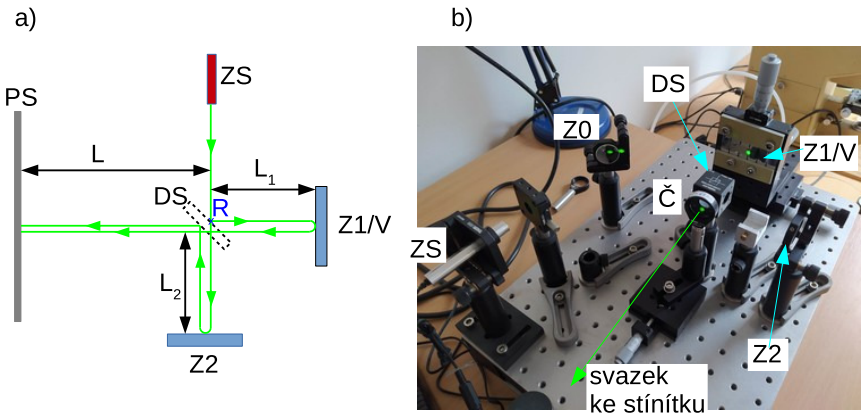
Intenzita (též plošná hustota zářivého toku) I rovinné vlny (11.3) je přímo úměrná časově průměrovanému kvadrátu intenzity elektrického pole [6]

$$I = \varepsilon_0 c \left\langle E(x,t)^2 \right\rangle_t = \frac{\varepsilon_0 c}{2} E_0^2. \tag{11.11}$$

Jednotkou intenzity jsou $\mathrm{W/m^2}$. Intenzita rovinné vlny je úměrná kvadrátu amplitudy E_0 vlnového pole, ale je nezávislá na veličinách k, ω, x a t.

Michelsonův interferometr

V této úloze bude využito Michelsonova interferometru (viz schéma na obr. 11.2). Svazek světla z laseru (ZS)[17] dopadá na dělič svazku (DS) a elektromagnetická vlna je rozdělena do dvou větví interferometru vedoucím k zrcátku Z1 (příp. vzorku V), resp. k zrcátku 2 (Z2). Dělič svazku je polopropustné zrcátko připravené a instalované ideálně tak, že je intenzita prošlého svazku rovna intenzitě svazku odraženého. Každá ze dvou vzniklých vln se šíří k jednomu ze zrcátek, které vlnu odráží ve směru proti vlně dopadající případně s malou úhlovou odchylkou. Kvůli lepší vizualizaci jsou na obr. 11.2 vlny dopadající a na zrcátku odražená stranově mírně posunuty. Po odrazu na zrcátkách Z1/V, resp. Z2 vlny postupují zpět směrem na dělič svazku, který opět propustí polovinu intenzity svazku a druhou polovinu odrazí. Pro zjednodušení jsou však na obrázku zobrazeny pouze pro nás relevantní části svazku postupující dále k projekčnímu stínítku (PS).



Obrázek 11.2: a) Schéma Michelsonova interferometru s vyznačenými trajektoriemi vln. b) Realizace Michelsonova interferometru v praktiku. Části interferometru: zdroj světla (laser, ZS), pomocné zrcátko (Z0), dělič svazku (polopropustné zrcátko, DS), zrcátko č. 1 nebo vzorek (Z1/V), zrcátko č. 2 (Z2), spojná čočka zvětšující svazek (Č) a projekční stínítko (PS). Dále jsou ve schématu a) vyznačeny geometrické dráhy v první a druhé větvi interferometru (L_1, resp. L_2) a ve společné větvi mezi děličem svazku a stínítkem (L).

Fáze, kterou nabyde vlna procházející první větví interferometru na trajektorii od referenčního bodu R až ke stínítku PS (tj. trajektorii DS (reflexe v R) → Z1 → DS (průchod) → PS) je

$$\Phi_1 = k(2L_1 + L) + \Phi_{\mathrm{LS}}, \tag{11.12}$$

[17] V praktiku použitý laserový svazek můžeme ve velice dobrém přiblížení chápat jako prostorově omezenou rovinnou vlnu.

kde Φ_{LS} je fáze nabytá při odrazu na DS a průchodu DS. Podobně část vlny, která prochází druhou větví interferometru od R k PS (tj. po trajektorii DS (průchod v R) $\rightarrow$ Z2 $\rightarrow$ DS (odraz) $\rightarrow$ PS), nabyde fázi

$$\Phi_2 = k(2L_2 + L) + \Phi_{\mathrm{LS}}. \tag{11.13}$$

Protože každá z vln se jednou odráží a jednou prochází DS, je člen Φ_{LS} pro obě vlny (tedy v obou vztazích (11.12) a (11.13)) identický. Pokud je amplituda vlny dopadající na DS z ZS v referenčním bodě R E_0, jsou optická pole diskutovaných dvou vln na stínítku PS dané

$$E_1 = \frac{E_0}{2}\cos(\Phi_1 - \omega t)\ \text{, resp. } E_2 = \frac{E_0}{2}\cos(\Phi_2 - \omega t), \tag{11.14}$$

kde jsme započetli fakt, že každý odraz na DS, příp. průchod přes DS, zmenší amplitudu svazku o faktor $\sqrt{2}$. Celková intenzita výsledného vlnového pole na PS je

$$I_{\mathrm{tot}} = \varepsilon_0 c \left\langle |E_1 + E_2|^2 \right\rangle_t, \tag{11.15}$$

kde $\langle\rangle_t$ opět značí průměrování přes čas. Po krátkém výpočtu dostáváme výsledný vztah pro intenzitu

$$I_{\mathrm{tot}} = \frac{I_0}{2}\left[1 + \cos\left(\Phi_1 - \Phi_2\right)\right] = \tag{11.16a}$$

$$= \frac{I_0}{2}\left[1 + \cos\left(2k\left(L_1 - L_2\right)\right)\right] = \tag{11.16b}$$

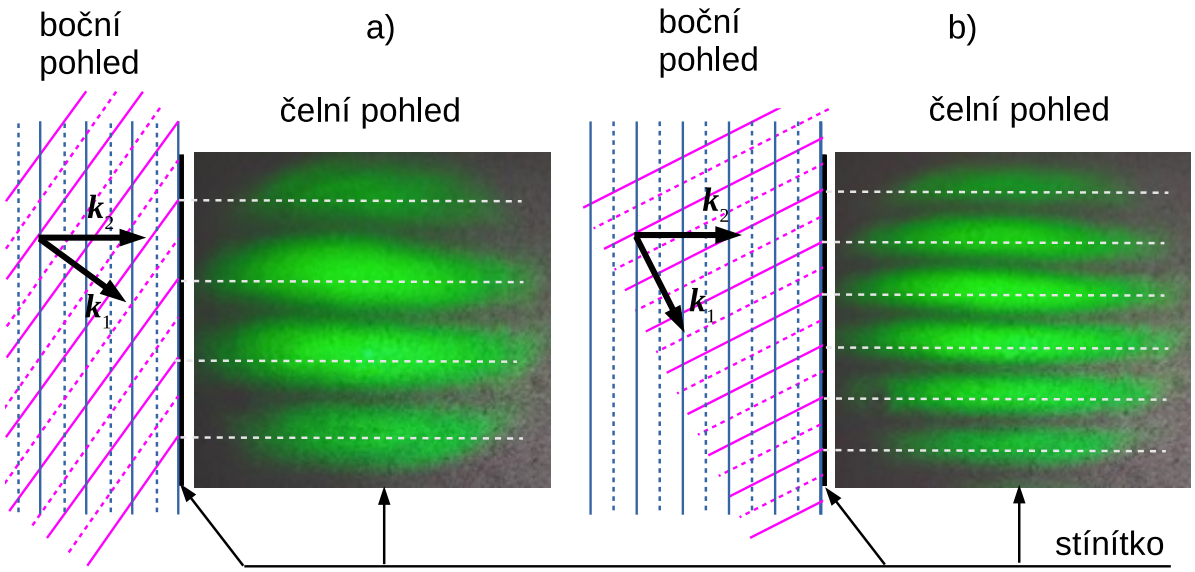
$$= \frac{I_0}{2}\left[1 + \cos\left(4\pi\frac{n_{\mathrm{vz}}L_1 - n_{\mathrm{vz}}L_2}{\lambda_0}\right)\right], \tag{11.16c}$$

kde n_{vz} je index lomu vzduchu. Tyto rovnice ukazují, že interferenční obraz na PS závisí pouze na rozdílu fází $\Delta\Phi = \Phi_1 - \Phi_2$ vln přicházejících ze dvou větví interferometru nebo, ekvivalentně, na rozdílu příslušných dvou optických drah. Vidíme, že pokud budeme měnit rozdíl optických drah, můžeme měnit intenzitu světla zaznamenávanou na PS mezi $I_{\mathrm{tot}} = 0$ a $I_{\mathrm{tot}} = I_0$. Na tomto principu budou založena měření využívající interferenci v tomto praktiku.

Princip měření fáze

Pokud se dvě interferující vlny šíří přesně ve stejném směru, uvidíme na stínítku jedinou skvrnu homogenní intenzity. Intenzita se bude měnit periodicky podle rovnice (11.16c), pokud budeme měnit relativní fázi, tedy rozdíl geometrických drah, těchto dvou vln. Pokud změníme rozdíl fází $\Delta\Phi = \Phi_1 - \Phi_2$ právě o 2π, budeme pozorovat opět stejnou intenzitu skvrny (např. přejdeme od maxima k maximu intenzity). Nicméně, pokud se budou dvě vlny dopadající na stínítko šířit vzájemně v poněkud odlišném směru, budeme pozorovat střídavě několik světlých a tmavých proužků, nazývaných interferenční proužky. Na obr. 11.3 jsou vyobrazena schémata optických polí dvou různoběžných rovinných vln a výsledných interferenčních obrazců pro dva různé úhly mezi interferujícími rovinnými vlnami. Optická pole jsou vyobrazena v určitý okamžik, kdy je maximum optického pole č. 2 právě totožné s povrchem stínítka. Maxima intenzity vznikají v bodech stínítka, kde jsou fáze obou vln na stínítku stejné, tedy v zobrazeném případě tam, kde optická pole vykazují maxima. Ta jsou v momentce ve schématech vyznačena opět plnou čarou. Ve skutečnosti se vlny pohybují rychlostí světla, ale body na stínítku, kde mají vlny stejnou fázi, se nepohybují a tím pádem zůstává interferenční obraz statický. Pokud na druhou stranu změníme fázi jedné z vln (např. posuneme zrcátko Z1 na obr. 11.2 směrem ke stínítku), interferenční obraz se posune. Situace na obr. 11.3 odpovídá případu, kdy jsou zrcátko Z2 a stínítko PS na obr. 11.2 orientovány normálami podél dopadajícího svazku procházejícího větví č. 2 Michelsonova interferometru, zatímco normála k Z1 je otočena kolem horizontální osy.

Z analýzy schématu interferujících vlnových polí v blízkosti stínítka na obr. 11.4 získáme vztah mezi úhlem, který svírají interferující vlny a vzdáleností sousedních interferenčních proužků.



Obrázek 11.3: Boční pohledy na interferující optická pole dvou různoběžných rovinných vln šířících se v různých směrech a čelní pohledy na výsledné interferenční proužky na stínítku (fotografie). Schémata optických polí a interferenční obrazce jsou vyobrazeny pro a) menší a b) větší úhel mezi směry šíření rovinných vln. Směry šíření jsou dány směry vlnových vektorů $\boldsymbol{k}_1$ a $\boldsymbol{k}_2$. Intenzivní interferenční proužky vznikají v bodech, kde mají vlny na stínítku stejnou fázi, což jsou ve vyobrazeném případě průsečíky maxim optických polí vyznačených plnými čarami.

Konkrétně se zaměřme na pravoúhlý trojúhelník, jehož vrcholy A a B leží v bodech sousedních interferenčních maxim a vrchol C je kolmou projekcí bodu A na sousední vlnoplochu, odpovídající následujícímu maximu vlny 2. Odvěsna AC tohoto trojúhlelníku má délku rovnou vlnové délce světla λ, délka přepony AB je vzdálenost maxim x_1, a úhel protilehlý k odvěsně AC je roven úhlu mezi směry šíření vln 1 a 2, označenému 2θ.[18] Odtud dostáváme pro vzdálenost mezi difrakčními maximy

$$x_1 = \frac{\lambda}{\sin(2\theta)} \tag{11.17}$$

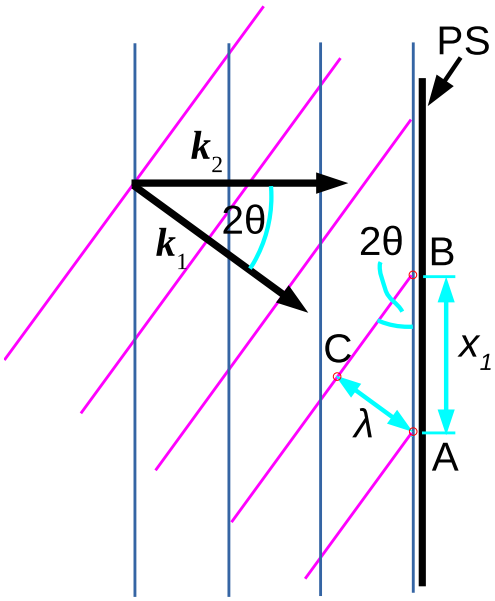
Na tomto místě poznamenejme, že úhly mezi směry šíření vln 1 a 2 na obr. 11.3 a 11.4 byly oproti experimentu v praktiku značně zveličeny. Úhly jsou v obrázku přizpůsobeny tomu, aby bylo možné zároveň viditelně zobrazit vzdálenosti vlnoploch λ (řádově stovky nm pro viditelné světlo) a vzdálenosti interferenčních maxim x, které jsou řádu jednotek mm. Dosadíme-li do vztahu (11.17) např. vzdálenost proužků 4 mm a vlnovou délku zeleného světla $\lambda = 530$ nm, dostáváme pro úhel mezi směry šíření vln $2\theta \approx 8 \cdot 10^{-3}\,^{\circ} \approx 0{,}5'$. Úhly 2θ mezi směry šíření rovinných vln vycházejících z větví 1 a 2 Michelsonova interferometru v praktiku budou tedy řádově desetiny až jednotky úhlové minuty.

Měření tloušťky tenké vrstvy pomocí interference

Princip měření

Měření bude provedeno pomocí Michelsonova interferometru (viz obr. 11.5 a 11.2a). Jako vzorek použijeme tenkou vrstvu hliníku (TV, viz obr. 11.5b)) nanesenou na skleněném podložním sklíčku (S). Vrstva byla při depozici rozdělena pomocí masky na řadu obdélníků oddělených mezerami. Navíc je přes tuto tenkou vrstvu a mezery podél délky vzorku nanesena krycí vrstva (KV) z hliníku (příp. z Au), u které předpokládáme stejnou tloušťku v oblastech TV i na skle (obr. 11.5c)).

[18] V teorii rozptylu se konvenčně označuje úhel mezi dvěma interferujícími nebo difraktujícími vlnami 2θ.

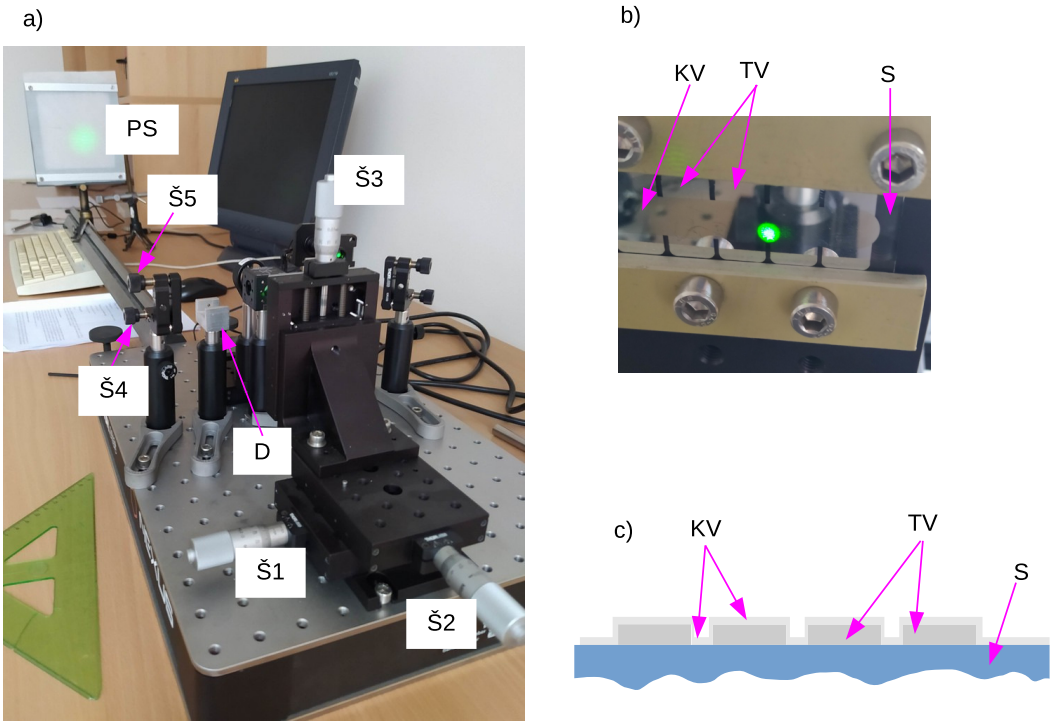


Obrázek 11.4: Schématické zobrazení interferujících vlnových polí z obr. 11.3a) v blízkosti stínítka (PS) v boční projekci. Pro přehlednost jsou zobrazeny pouze vlnoplochy odpovídající maximům optických polí vln 1 a 2 (fialové, resp. modré plné čáry). Na obrázku byla opět znázorněna situace v momentě, kdy je maximum pole 2 právě totožné s povrchem stínítka. Úhel mezi směry šíření vlnových polí je 2θ, vzdálenost interferenčních proužků na stínítku je x_1.

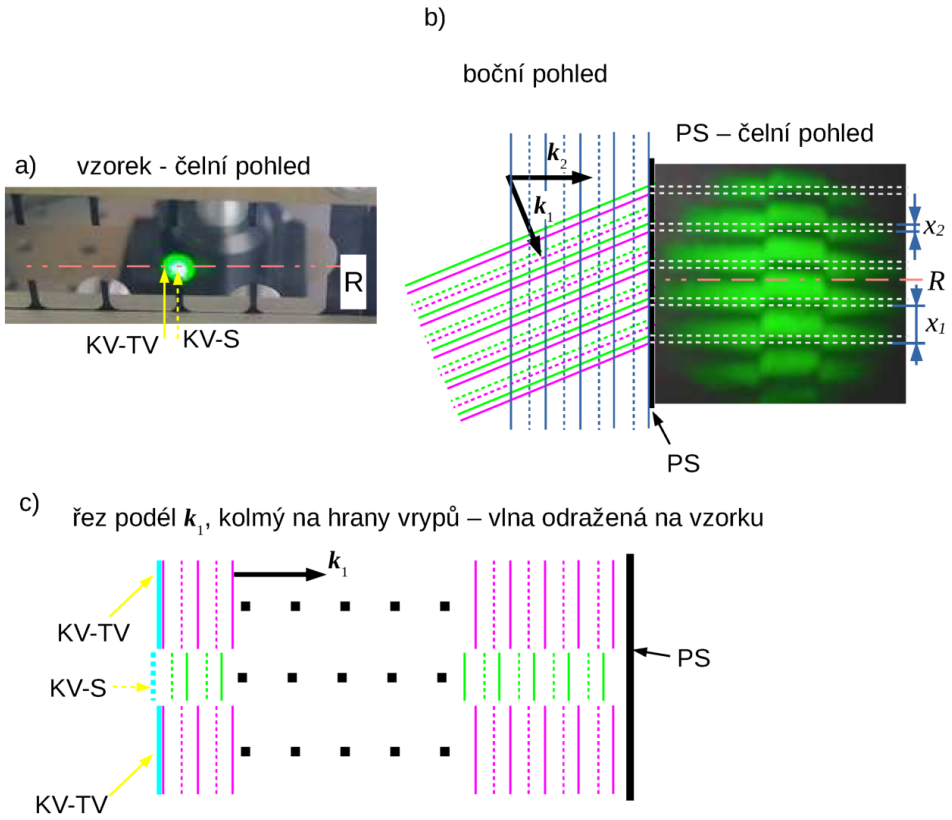
Účelem použití KV je dosáhnout vysoké odrazivosti vzorku nad TV i mezerami, což je potřebné k obdržení intenzivního a kontrastního interferenčního obrazce. Zatímco sklo má pro viditelné světlo při kolmém dopadu odrazivost řádově jednotek procent, odrazivost kovů je ve vyšších desítkách procent (pro Al více jak 90 %).
V experimentu bude vzorek umístěn v první větvi interferometru (obr. 11.2b)) tak, aby svazek dopadal na KV částečně nad TV (KV-TV) a částečně v oblasti mezery na KV na skle (KV-S), kde je krycí vrstva přímo na skle, (viz obr. 11.6a)). Vlna odražená v oblasti KV-S musí urazit geometrickou dráhou o dvojnásobek tloušťky vrstvy t větší oproti vlně odražené na KV-TV ($L_{1,\,\mathrm{S}} - L_{1,\,\mathrm{TV}} = 2t$) (viz obr. 11.6c)). Obě vlny interferují s optickým polem vlny odražené na referenčním zrcátku Z2. Přitom vlny odražené na vzorku svírají s vlnou od Z2 nenulový (v experimentu malý, $2\theta < 10'$) úhel ve vertikální rovině. Díky odlišné geometrické dráze $s = 2t$ části vlny po odrazu na KV-TV a KV-S ke stínítku budou interferenční obrazce od těchto dvou vln vertikálně posunuty (obr. 11.6b)).
Vztah mezi tloušťkou vrstvy t a vertikálním posunem interferenčních obrazců x_2 dostaneme z analýzy schématu optických polí v blízkosti stínítka na obr. 11.7. Jak plyne ze schématu, pro jednoznačné určení tloušťky vrstvy t musí být rozdíl optických drah vln ze vzorku menší než vlnová délka světla, tedy $t = s/2 < \lambda/2$. Z podobnosti trojúhelníků ABC a AED dostáváme pro tloušťku vrstvy

$$t = \frac{x_2}{x_1}\frac{\lambda}{2}, \tag{11.18}$$

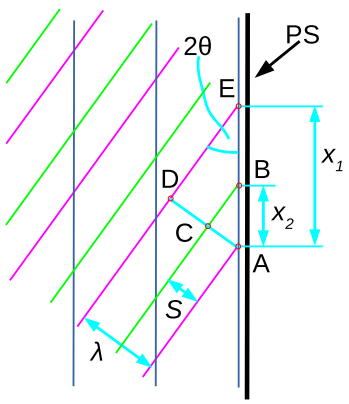
kde x_1 je opět vzdálenost nejbližších interferenčních maxim od vlny odražené na KV-TV. Vzhledem k tomu, že relativní nejistota měření vzdálenosti interferenčních proužků v experimentu bude o řád či více větší než odchylka indexu lomu vzduchu od jedničky, můžeme v (11.18) aproximovat vlnovou délku světla laseru ve vzduchu vakuovou vlnovou délkou $\lambda \approx \lambda_0$.



Obrázek 11.5: a) Celkový pohled na aparaturu Michelsonova interferometru v praktiku. Šrouby Š1 až Š3 slouží k posuvu vzorku v horizontálním směru napříč, resp. podél dopadajícího svazku a ve vertikálním směru. Šrouby Š4 a Š5 slouží k náklonu referenčního zrcátka (Z2) okolo horizontální, resp. vertikální osy. Dále je označen držák (D) kyvety, který bude využit při měření indexu lomu vzduchu. b) Vzorek s tenkou vrstvou (TV) hliníku nanesenou na sklo (S) a s páskem krycí hliníkové vrstvy (KV), překrývající ostrůvky TV i sklo. c) Schéma řezu vzorkem.



Obrázek 11.6: a) Čelní pohled na vzorek, na nějž dopadá laserový svazek do oblasti s krycí vrstvou (KV) částečně nad tenkou vrstvou (Al obdélníky, KV-TV) a částečně nad mezerou (KV-S). Přerušovaná čára R označuje průsečík povrchu vzorku s rovinou řezu v c). b) Schéma bočního pohledu na interferující optická pole a čelního pohledu na odpovídající interferenční obrazec na stínítku (PS). Vlnoplochy vlny odražené na vzorku v oblasti mezery (zelené čáry, odraz na KV-S) jsou posunuty vůči vlnoplochám vlny odražené v oblasti KV-TV (fialové čáry). Tyto vlny interferují s vlnou odraženou na referenčním zrcátku (modré vlnoplochy). Označeny jsou měřená výška schodku na interferenčním proužk x_2 a vzdálenost sousedních interferenčních proužků x_1. Červená přerušovaná čára R označuje průsečík PS s rovinou řezu na obr. c). c) Schéma vlnových polí odražených na vzorku v řezu kolmém k vlnoplochám a hranám tenké vrstvy.



Obrázek 11.7: Schéma interference optických polí odražených na KV-TV (fialové vlnoplochy) a KV-S (zelená) s vlnou odraženou na referenčním zrcátku Z2 (modrá) v blízkosti stínítka. Body A a E odpovídají vertikálním polohám interferenčních maxim od vlny odražené na KV-TV. Bod B odpovídá maximu od vlny odražené na KV-S. Body C a D jsou kolmými projekcemi bodu A na vlnoplochy vln jdoucích od KV-S a KV-TV. Vzdálenost S je rovna rozdílu optických drah dvou vln odražených na vrstvě a v mezeře $2n_{\mathrm{vz}}t$.

Postup měření

Zapněte laser (zelený laser vlnové délky $\lambda = 531{,}2\,\mathrm{nm}$). Umístěte vzorek do držáku vzorků v první větvi Michelsonova interferometru (obr. 11.2b)) a vycentrujte vzorek tak, aby stopa laseru dopadala na krycí vrstvu (KV) v oblasti mezery mezi obdélníky TV (obr. 11.7a). Jemný posuv vzorku můžete provést pomocí šroubů Š1 a Š3 (obr. 11.5a)). Pomocí šroubů náklonu referenčního zrcátka Š4 a Š5 optimalizujte interferenční obrazec na PS tak, aby byly interferenční proužky přibližně horizontálně orientované a bylo zobrazeno pět až deset proužků. Interferenční obrazec pak nafoťte mobilním telefonem příp. pomocí kamery v praktiku. Proveďte pro několik míst na vzorku i pro různé počty zobrazených interferenčních proužků na jednom místě vzorku. Fotografie pak můžete zpracovat např v grafickém program s možností měření vzdáleností.

Úkoly

1. Nastavit v zorném poli 5–10 interferenčních proužků.
2. Uložit fotografii interferenčního obrazce.
3. Nastavit jiný počet interferenčních proužků a opakovat bod 2.
4. Body 1 až 3 opakovat na jiném místě vzorku.
5. Pro každý interferenční obrazec určit vzdálenosti sousedních interferenčních proužků a výšku schodku na proužku pro pozorované proužky, tj. veličiny x_1 resp. x_2. Z hodnot vypočítat tloušťku vrstvy a statisticky zpracovat.
6. Zhodnotit rovnoměrnost tloušťky vrstvy s přihlédnutím k chybě měření, tj. porovnat výsledné tloušťky vrstvy obdržené z jednotlivých interferenčních obrazců.

Určení indexu lomu vzduchu

Princip měření

K určení indexu lomu využijeme opět Michelsonova interferometru (obr. 11.2a)). Pokud vložíme do druhého ramene interferometru kyvetu o délce d, z níž odčerpáme vzduch, změní se optická dráha v tomto rameni o hodnotu

$$2dn_1 - 2dn_{\mathrm{vz}}, \tag{11.19}$$

kde n_{vz} je index lomu vzduchu při aktuálním atmosférickém tlaku p_{vz} a n_1 je index lomu po odčerpání kyvety na tlak p_1. Faktor 2 je dán dvojím průchodem světla přes kyvetu.
Při dostatečně pomalém čerpání je možné sledovat posun interferenčních proužků. Nabytá fáze po průchodu vlny z bodu R přes Z2 na PS na obr. 11.2a) se změní z (11.13) na

$$\Phi_2 = \frac{2\pi}{\lambda_0}\left[n_{\mathrm{vz}}(2L_2 + L) + 2(n_1 - n_{\mathrm{vz}})d\right] + \Phi_{\mathrm{LS}} + \Phi_{\mathrm{O}}, \tag{11.20}$$

kde Φ_{O} je změna fáze vlny po průchodu vstupním a výstupním okénkem kyvety. V průběhu posunu obrazce, každý následující průchod interferenčního proužku sledovaným bodem stínítka odpovídá změně fáze of 2π (viz (11.16a)), a tedy změně optické dráhy (11.19) o jednu vlnovou délku λ_0. Celkem se během odčerpávání vzduchu z kyvety posune interferenční obrazec o N proužků a bude platit

$$2d(n_{\mathrm{vz}} - n_1) = N\lambda_0. \tag{11.21}$$

Závislost indexu lomu na tlaku p a teplotě T vzduchu obdržíme, pokud uvážíme, že rozdíl indexu lomu od jedničky je v dobrém přiblížení úměrný hustotě vzduchu $(n-1) \propto \varrho$ (Gladstoneův–Daleův vztah [6]). Dále uvážíme vzduch jako ideální plyn a s použitím stavové rovnice ideálního plynu

$$pV = n_{\mathrm{mol}}RT, \tag{11.22}$$

kde n_{mol} je molární množství vzduchu v objemu V a R je univerzální plynová konstanta, a vztahu mezi molárním množstvím a hustotou vzduchu

$$\rho = \frac{n_{\mathrm{mol}}M_{\mathrm{m}}}{V}, \tag{11.23}$$

kde M_{m} je střední molární hmotnost molekuly vzduchu, dostáváme

$$n = 1 + \mathrm{konst.}\,\frac{p}{T}. \tag{11.24}$$

Dále budeme předpokládat, že se teplota vzduchu T v kyvetě v průběhu odčerpávání vzduchu nemění. S využitím (11.24) pak můžeme přepsat (11.21) jako

$$2d\left[(n_{\mathrm{vz}} - 1) - (n_{\mathrm{vz}} - 1)\frac{p_1}{p_{\mathrm{vz}}}\right] = N\lambda_0. \tag{11.25}$$

Odtud vidíme, že index lomu vzduchu n_{vz} za aktuálního atmosferického tlaku p_{vz} můžeme zjistit z počtu interferenčních proužků N, o nějž se posune interferenční obrazec při snížení tlaku ve vývěvě o $\Delta p = p_{\mathrm{vz}} - p_1$, ze vztahu

$$n_{\mathrm{vz}} = 1 + \frac{N\lambda_0}{2d}\frac{p_{\mathrm{vz}}}{\Delta p}. \tag{11.26}$$

Pro porovnání experimentálně zjištěných hodnot s tabelovanými je třeba přepočíst tabulkovou hodnotu indexu lomu podle aktuálních atmosférických podmínek s použitím (11.24). Podle práce [4] je tabulková hodnota indexu lomu suchého vzduchu pro zelené světlo o vlnové délce 532 nm rovna 1,000278 při tlaku 101,3 kPa a teplotě 15 °C (standardní atmosféra). S uvážením přesnosti našeho měření můžeme závislost indexu lomu na vlhkosti vzduchu zanedbat. Při teplotách do 25 °C se index lomu mění méně než o 10^{-6} v celém rozsahu relativní vlhkosti mezi 0 a 100 % [4, 5, 7].

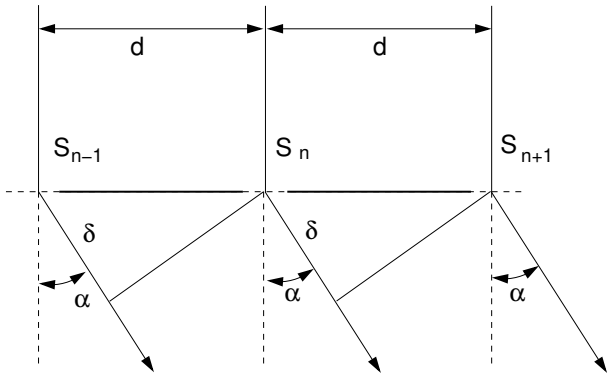
Úkoly

1. Umístěte do interferometru kyvetu. Spočtěte počet interferenčních proužků, o které se posune obrazec během vyčerpání nebo zavzdušnění kyvety. Odečtěte konečný tlak v kyvetě p_1 a vypočtěte index lomu vzduchu. Proveďte toto měření několikrát kvůli zjištění nejistot.

2. Porovnejte zjištěnou hodnotu n_{vz} s tabulkovou hodnotou přepočtenou podle aktuálních podmínek. Teploměr a barometr se nachází v praktiku.

Difrakce světla

Difrakční mřížka na průchod je planparalelní skleněná destička s velkým počtem tenkých, navzájem rovnoběžných a stejně vzdálených vrypů. Mezerami mezi vrypy prochází světlo beze změny směru, na vrypech je difraktováno. Osvětlíme-li takovou mřížku (obr. 11.8) rovnoběžným svazkem paprsků s vlnovou délkou λ, stávají se vrypy podle Huygensova principu zdrojem elementárních rozruchů a šíří se do všech směrů. Interferencí se však zesilují pouze v určitém směru. Pozorujeme-li světlo prošlé mřížkou dalekohledem zaostřeným na nekonečno, protnou se paprsky vystupující ze všech štěrbin pod týmž úhlem α v ohniskové rovině objektivu.



Obrázek 11.8: Schéma měření s difrakční mřížkou na průchod.

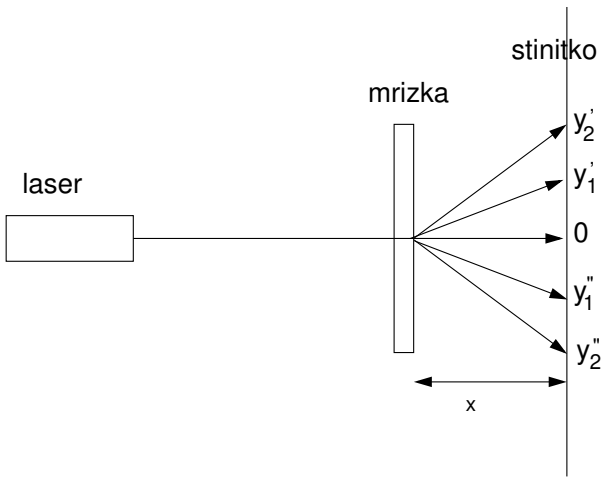
Z obr. 11.8 je zřejmé, že se tyto paprsky nesetkávají se stejnou fází. Označíme-li S_k, S_{k+1} středy dvou sousedních štěrbin, pak jejich vzdálenost d se nazývá mřížková konstanta a jejich střední paprsky mají dráhový rozdíl $d \sin\alpha$. Splňuje-li dráhový rozdíl δ podmínku

$$\delta = d \sin\alpha = m\,\lambda\,, \tag{11.27}$$

zesilují se střední paprsky vycházející ze všech štěrbin. Parametr m je řád maxima. Monochromatické světlo vytvoří tedy ve směrech daných úhly α_1, α_2,... maxima. Pro tyto úhly platí

$$\sin\alpha_1 = \lambda/d,\ \sin\alpha_2 = 2\lambda/d,\ \ldots,\ \sin\alpha_r = m\lambda/d\,. \tag{11.28}$$

Na základě vztahů (11.28) lze velmi přesně určit vlnovou délku světla.
V našem experimentu bude zdrojem monochromatického světla He-Ne laser (vlnová délka 632,8 nm), jehož světelný svazek je úzký a téměř nerozbíhavý. To umožňuje velmi jednoduché uspořádání: zdroj – mřížka – stínítko a místo měření úhlů α_m goniometrem určíme $\sin\alpha_m$ měřením délky stran v příslušném pravoúhlém trojúhelníku.



Obrázek 11.9: Schéma měření s difrakční mřížkou na průchod.

Uspořádání experimetu

Na optické lavici je umístěn He-Ne laser, optická mřížka a pozorovací stínítko s milimetrovým papírem, viz obr. 11.9. Mezi laser a mřížku vkládáme stínítko s malým otvorem pro světelný svazek, které zachytí paprsky vzniklé difrakcí při odrazu od mřížky a tím zamezíme nekontrolovanému pohybu laserového paprsku po laboratoři. Schéma uspořádání experimentu při pohledu shora je na obrázku.

Při experimentu pozor – záření laseru je nebezpečné pro oko!

Vzdálenost x mezi mřížkou a stínítkem lze měnit a měřit ji pomocí stupnice na optické lavici. Protože vrypy na optické mřížce jsou orientovány svisle, budou difraktované svazky odchýleny vodorovně vlevo a vpravo od přímého (primárního) svazku. Označíme-li obecně vzdálenost místa dopadu přímého a difraktovaného paprsku jako y, bude

$$\sin\alpha_m = \frac{y_m}{\sqrt{y_m^2 + x^2}} \qquad m = 1, 2, \ldots \tag{11.29}$$

Při měření nastavujeme různé vzdálenosti x a pro každou hodnotu pak odečítáme na milimetrovém papíře stínítka polohy maxim prvního a druhého řádu vpravo y_1', y_2' a vlevo y_1'', y_2'' od primárního svazku. Odchylku paprsků na stínítku určíme jako průměr

$$y_1 = \frac{y_1' + y_1''}{2} \qquad \text{a} \qquad y_2 = \frac{y_2' + y_2''}{2}\,. \tag{11.30}$$

Dosazením (11.29) do (11.27) můžeme určit buď vlnovou délku světla λ, pokud známe vzdálenosti vrypů mřížky d, nebo vzdálenost vrypů d, resp. jejich hustotu N, pokud budeme znát vlnovou délku λ.

Úkoly

1. Pozorujte difrakční jev na stínítku a vzdálenost x nastavte tak, aby bylo možno pozorovat dvě difrakční maxima po obou stranách stopy primárního svazku. Změřte polohu všech maxim a měření opakujte pro různé hodnoty x.

2. Určete vzdálenost vrypů d mřížky a jejich hustotu N. Zjištěnou hodnotu porovnejte s hodnotou uvedenou výrobcem mřížky. Vlnovou délku He-Ne laseru můžete nalézt též v tabulkách [3].

Užití v praxi: Interferenčního zesílení či zeslabení světla se ve velkém měřítků užívá v různých optických filtrech, kam lze zařadit i antireflexní vrstvy optických prvků. Interferenční obrazce exponované ve fotografické emulzi představují základ hologramu, který při osvětlení světlem o stejné vlnové délce, jakou byl exponován, rekonstruuje prostorový obraz daného předmětu. Interferenční techniky pak nacházejí široké uplatnění v astronomii, zejména té radiové, kdy současným měřením signálu ze dvou vzdálených míst lze dosáhnout úhlového rozlišení tisícin úhlové vteřiny.
Difrakční mřížky (na rozdíl od praktika sledovány v odraženém světle) jsou základem naprosté většiny současných spektrometrů. Difrakční jevy pak lze pozorovat i na strukturách s řádově menší periodou, jako jsou atomové roviny nebo krystaly makromolekul.

Literatura k úloze 11

[1] H.E. Bennett a J.M. Bennett: *Physics of Thin Films*, Vol. 4, Academic New York, 1967.

[2] J. Kuběna: *Úvod do optiky*. Skripta MU Brno, 1994.

[3] J. Brož, V. Roskovec, M. Valouch: *Fyzikální a matematické tabulky*. SNTL Praha, 1980.

[4] P.E. Ciddor, *Refractive index of air: 3. The roles of CO_2, H_2O, and refractivity virials: erratum*, Appl. Opt. **41**, 7036–7036 (2002).

[5] B. Edlén, *The refractive index of air*, Metrologia **2**, 71–80 (1966).

[6] E. Hecht: *Optics*, Addison Wesley, San Francisco, 2002.

[7] On-line kalkulátor indexu lomu vzduchu: `https://emtoolbox.nist.gov/Wavelength/ciddor.asp`

Ústav fyziky kondenzovaných látek
Přírodovědecká fakulta, Masarykova univerzita, Brno

Fyzikální praktikum 2

12. Optická spektroskopie

Cíle praktika

1. Určení spektrální závislosti indexu lomu neabsorbující tlusté vrstvy z měření propustnosti.
2. Určení indexu lomu a tloušťky tenké vrstvy z měření propustnosti.
3. Demonstrace Lambertova–Beerova zákona a určení absorpčního koeficientu.

Určení spektrální závislosti indexu lomu neabsorbující tlusté vrstvy z měření propustnosti

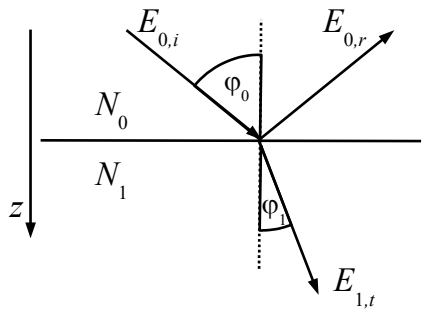
Spektrální závislost propustnosti, tj. závislost propustnosti na vlnové délce světla, je typicky nejjednodušeji měřitelná spektroskopická veličina, ze které lze získat informace o spektrální závislosti optických konstant (indexu lomu a absorpce). Spektrální závislost optických konstant je důležitá sama o sobě pro aplikace, dále na jejím základě je možné studovat procesy v látce, např. mezipásové přechody, vibrace iontů, chování volných nosičů v kovech a polovodičích atp. V první části tohoto praktika se setkáváme s relativně jednoduchou situací, a to propustnosti tlusté neabsorbující vrstvy (oboustranně leštěná destička zkoumané látky). Tlustou vrstvou se rozumí taková tloušťka vrstvy, pro kterou již nedochází, pro dané rozlišení spektrometru, k rozlišení interferencí elektrických polí odražených od předního a zadního rozhraní a výsledná intenzita záření je daná součtem intenzit záření individuálních paprsků.

Fresnelovy koeficienty

Základním stavebním kamenem při výpočtech v optické spektroskopii jsou Fresnelovy (výslovnost „frenelovy“) rovnice popisující vztahy mezi elektrickými poli při dopadu rovinné vlny na rovinné rozhraní ilustrované na obr. 12.1. Uvažujme rovinnou vlnu s intenzitou elektrického pole $E_{0,i}$, která dopadá pod úhlem φ_0 z prostředí s indexem lomu N_0 na rozhraní s prostředím s indexem lomu N_1. $E_{0,r}$ resp. $E_{1,t}$ označuje intenzitu elektrického pole odražené resp. prošlé vlny. Vztahy mezi těmito intenzitami elektrického pole popisují Fresnelovy rovnice [1, 2, 3]

$$r_{01} \equiv \frac{E_{0,r}}{E_{0,i}} = \frac{N_0 - N_1}{N_0 + N_1}\,, \qquad t_{01} \equiv \frac{E_{1,t}}{E_{0,i}} = \frac{2N_0}{N_0 + N_1}\,, \tag{12.1}$$

kde r_{01} resp. t_{01} je Fresnelův koeficient pro odraženou, resp. prošlou vlnu. Vztahy v této formě odpovídají kolmému dopadu $\varphi_0 = 0$, který budeme používat v této úloze. Fresnelovy koeficienty pro obecný úhel dopadu je možné z těchto a jakýchkoliv následujících vztahů získat jednoduše substitucí $N_j \to N_j \cos\varphi_j$, $j = 0, 1$, pro vlnu polarizovanou kolmo na rovinu dopadu (s-polarizace) a substitucí $N_j \to N_j/\cos\varphi_j$ pro vlnu polarizovanou rovnoběžně s rovinou dopadu (p-polarizace). Indexy lomu N_j jsou obecně komplexní, $N_j = n_j + ik_j$, kde n_j resp. k_j je jejich reálná resp. imaginární část.



Obrázek 12.1: Odraz a průchod vlny na rozhraní dvou prostředí s indexem lomu N_0 a N_1.

V následujících výpočtech budeme také potřebovat inverzní situaci, kdy vlna dopadá z prostředí 1 do prostředí 0, která je charakterizována koeficienty

$$r_{10} = \frac{N_1 - N_0}{N_1 + N_0} , \qquad t_{10} = \frac{2N_1}{N_1 + N_0} . \tag{12.2}$$

Jak lze dosazením lehce dokázat, mezi koeficienty (12.1) a (12.2) platí vztahy

$$r_{10} = -r_{01} , \qquad t_{01}t_{10} + r_{01}^2 = 1 . \tag{12.3}$$

Propustnost absorbující tlusté vrstvy

Nyní již máme vše potřebné pro výpočet propustnosti vzorku ve tvaru destičky s indexem lomu N_1, na které dopadá záření z prostředí s indexem lomu N_0, viz obr. 12.2. Nejprve uvažujme obecněji propustnost T_{012} vrstvy 1 z prostředí 0 do prostředí 2. Ta je definovaná jako podíl celkové intenzity záření prošlého vzorkem, $I_{2,t}$, a intenzity dopadajícího záření, $I_{0,i}$,

$$T_{012} \equiv \frac{I_{2,t}}{I_{0,i}} . \tag{12.4}$$

Připomeňme, že intenzita záření I elektromagnetické vlny s amplitudou E_0 je $I = cn\varepsilon_0|E_0|^2/2$, kde c je rychlost světla ve vakuu, n je reálná část indexu lomu a ε_0 permitivita vakua. Uvnitř destičky má elektrická vlna ve směru osy z tvar

$$E_1(z,t) = E_1 e^{i(k_{1z}z - \omega t)} , \tag{12.5}$$

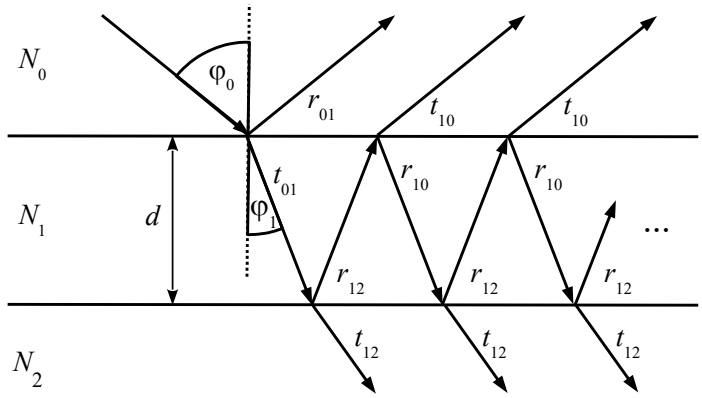
kde $k_{1z} = N_1(\omega/c)\cos\varphi_1$ je vlnový vektor ve směru osy z, ω kruhová frekvence, c rychlost světla a φ_1 úhel šíření v prostředí 1, viz detailní diskuze např. v [1, 2, 3]. Zde jsme uvedli pro obecnost vztah pro nenulový dopad; v následujícím budeme však uvažovat $\varphi_1 = 0$. S uvážením, že $\omega/c = 2\pi/\lambda$, kde λ je vlnová délka, se amplituda této vlny při translaci o tloušťku vrstvy d změní o multiplikativní faktor $e^{i\beta}$, kde

$$\beta = k_{1z}d = \frac{2\pi}{\lambda}N_1 d \tag{12.6}$$

je změna fáze. V obecnosti je index lomu prostředí 1 komplexní, $N_1 = n_1 + ik_1$, což dává

$$e^{i\beta} = e^{-(\alpha/2)d} e^{i(2\pi/\lambda)n_1 d} , \tag{12.7}$$

kde $\alpha = 4\pi k_1/\lambda$ je koeficient absorpce. Vidíme, že se tento faktor rozložil na dvě části: první multiplikativní člen na pravé straně odpovídá exponenciálnímu poklesu světla v absorbujících materiálech. Tento útlum vede k Lambertově-Beerovu zákonu, se kterým se setkáme v poslední části tohoto praktika. Druhá exponenciála na pravé straně odpovídá změně fáze, která může vézt k interferenci, se kterou se setkáme v druhé části tohoto praktika.



Obrázek 12.2: Ilustrace průchodu paprsku vrstvou tvořící díky vnitřním odrazům nekonečnou geometrickou řadu. Paprsek dopadá z prostředí s indexem lomu N_0, typicky vzduch, na vrstvu s indexem lomu N_1. Vrstva může být buď tlustá (následujícím prostředím je často opět vzduch $N_2 = N_0$) a nedochází k interferenci (první a třetí část úlohy). Nebo může být vrstva tenká a proto dochází k interferenci, což je obvykle případ vrstvy deponované na substrátu s indexem lomu N_2 (druhá část úlohy).

Nyní vyjádřeme propustnost tlusté vrstvy, T_{012}, mezi prostředím 0 a 2. Intenzita prošlého záření je daná součtem intenzit individuálních příspěvků vzniklých díky vnitřním odrazům, viz obr. 12.2. První tři příspěvky do propustnosti jsou

$$T_{012} = \frac{n_2}{n_0}\left[\left|t_{01}t_{12}e^{-(\alpha/2)d}\right|^2 + \left|t_{01}r_{12}r_{10}t_{12}e^{-3(\alpha/2)d}\right|^2 + \left|t_{01}r_{12}^2r_{10}^2t_{12}e^{(-5(\alpha/2)d}\right|^2 + \ldots\right] , \quad (12.8)$$

kde každý člen je dán kumulativním násobkem Fresnelových koeficientů při průchodu nebo odrazu od rozhraní a exponenciální poklesem při průchodu vrstvou. n_0 resp. n_2 jsou reálné části indexu lomu vstupního resp. výstupního prostředí. Tato řada je geometrickou řadou s kvocientem $q = |r_{10}r_{12}|^2e^{-2\alpha d}$, jejíž součet dává

$$T_{012} = \frac{n_2}{n_0}\frac{|t_{01}t_{12}|^2e^{-\alpha d}}{1 - |r_{10}r_{12}|^2e^{-2\alpha d}} . \quad (12.9)$$

V případě samostojící tlusté vrstvy (často substrátu pro tenké vrstvy) je posledním prostředím opět vzduch, $N_2 = N_0$. S využitím vztahů (12.3) pak dostáváme pro takovou propustnost T_s

$$T_\mathrm{s} = T_{012}(N_2 = N_0) = \frac{|1 - r_{01}^2|^2e^{-\alpha d}}{1 - |r_{01}|^4e^{-2\alpha d}} = \frac{(1 - R_{01})^2e^{-\alpha d}}{1 - R_{01}^2e^{-2\alpha d}} , \quad (12.10)$$

kde jsme zavedli odrazivost $R_{01} = |r_{01}|^2$. Poslední výsledek lze chápat následovně: čitatel odpovídá dvěma reflexním „ztrátám“ při průchodu předním a zadním rozhraním a exponenciála odpovídá poklesu způsobenému absorpcí. Jmenovatel je pak výsledkem součtu všech odrazů uvnitř vrstvy.

Určení indexu lomu neabsorbující tlusté vrstvy z její propustnosti

V případě neabsorbujícího materiálu s $\alpha = 0$ dostáváme z předchozího vztahu po zjednodušení

$$T_\mathrm{s} = \frac{1 - R_{01}}{1 + R_{01}} \quad (12.11)$$

a po dosazení Fresnelových koeficientů (12.1) dostáváme

$$T_\mathrm{s} = \frac{2n_0n_\mathrm{s}}{n_0^2 + n_\mathrm{s}^2} , \quad (12.12)$$

kde pomocí $N_1 = n_s$ je označen reálný index lomu tlusté vrstvy (substrátu). Dále budeme při zpracování dat předpokládat, že index lomu prostředí je rovný vakuu[19] a tedy $n_0 = 1$ a pro propustnost dostáváme

$$T_s = \frac{2n_s}{1 + n_s^2} \,. \tag{12.13}$$

Tato rovnice vede na kvadratickou rovnici pro n_s, jejíž řešení je

$$n_s(\lambda) = \frac{1 + \sqrt{1 - T_s(\lambda)^2}}{T_s(\lambda)} \,. \tag{12.14}$$

Pro každou vlnovou délku λ tak dostáváme hledaný index lomu $n_s(\lambda)$. Takto jednoduché zpracování dat je možné pouze v případě neabsorbujícího materiálu, kde na jednu hledanou veličinu $n_s(\lambda)$ máme jednu měřenou hodnotu $T_s(\lambda)$. Pokud v případě absorbujícího materiálu jsou obě dvě hledané konstanty (n_s a k_s) neznámé, pak je situace citelně komplikovanější[20].

Cauchyova rovnice

Obdrženou spektrální závislost indexu lomu je typicky užitečné dále analyzovat fyzikálními modely. Jedním z nejjednodušších modelů odpovídající oblasti bez absorpce je Cauchyova rovnice [1, 4]

$$n(\lambda) = A + \frac{B}{\lambda^2} \,. \tag{12.15}$$

Jedná se o přibližný rozvoj indexu lomu. Někdy se bere v potaz i další člen na pravé straně, $+\frac{C}{\lambda^4}$, který je jen malou korekcí pro krátké vlnové délky a v tomto praktiku ho nebudeme uvažovat. Koeficient A představuje dlouhovlnnou limitu indexu lomu a koeficient B vyjadřuje disperzi, tzn. závislost na vlnové délce a typicky se vyjadřuje v $\mu\mathrm{m}^2$. Vzhledem k tomu, že v neabsorbující oblasti index lomu vždy roste s klesající vlnovou délkou[21], je koeficint B vždy kladný. Proložení dat Cauchyovým modelem umožňuje interpolovat data do libovolného bodu uvnitř měřeného rozsahu. Dále tato parametrizace umožňuje např. redukovat data pouze na dva koeficienty, které je možné srovnat s literaturou, viz např. koeficienty pro optické sklo BK7 [4]. Cauchyova rovnice představuje značně přibližný popis indexu lomu v neabsorbující oblasti vlnových délek. Přesnějším často používaným modelem pro neabsorbující oblast je Sellmaierův model, viz např. [1, 5].

Určení indexu lomu a tloušťky tenké vrstvy

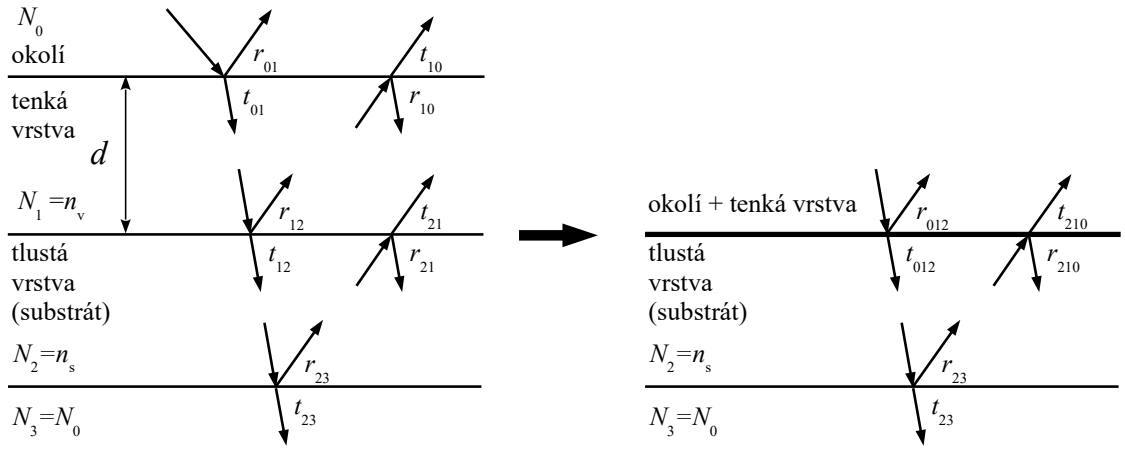
V aplikacích se často setkáváme se situací, kdy tenká vrstva jednoho materiálu je nanesena na substrát jiného materiálu. Význam adjektiva „tenký“ je ten, že vrstva je dostatečně tenká na to, aby pro měřenou vlnovou délku a rozlišení spektrometru docházelo k interferenci odražených paprsků od rozhraní. Vzhledem k tomu, že interference ve vrstvě je zásadně ovlivněna její tloušťkou, je potřeba ji vzít při zpracování v potaz. Buď je tloušťka vrstvy určená z jiného experimentu, nebo je možno ji určit ze samotné spektroskopické závislosti propustnosti. V tomto praktiku se setkáme s měřením propustnosti neabsorbující tenké vrstvy, která je nanesena na neabsorbující podložku. Tloušťku vrstvy bude možno určit pomocí interferencí pozorovaných ve spektroskopické závislosti propustnosti.

Prvně potřebujeme odvodit vztahy pro interferenci na tenké vrstvě. Jedná se o výpočet analogický k součtu geometrické řady z první části úlohy, viz obr. 12.2, jen zde je situace koherentní, a tedy

[19] Index lomu vzduchu je odlišný od vakua až na čtvrté platné číslici, což se znatelně projevuje jen ve speciálně navržených experimentech např. využívajících interferenci, jako můžete zakusit v úloze 11 v tomto praktiku.

[20] V takových situacích je buď potřeba určit odrazivost R_{01} z nezávislého měření, nebo použít elipsometrii, která sama o sobě poskytuje dva měřené parametry. Další možností je využít spektrálních modelů, které jsou Kramersovsky–Kronigovsky konzistentní.

[21] Toto je možné vidět jako důsledek Kramersových–Kronigových relací.



Obrázek 12.3: Ilustrace výpočtu propustnosti tenké vrstvy na substrátu. Obrázek napravo ilustruje krok ve výpočtu, kdy tenkou vrstvu vyjádříme pomocí koeficientů propustnosti, t_{012}, a odrazivosti, r_{012} získaných z výpočtu interference na tenké vrstvě.

sčítáme intenzity elektrického pole. Pro první tři příspěvky k relativní amplitudě prošlé vlny t_{012} z prostředí 0, přes vrstvu 1 do prostředí 2 dostáváme

$$t_{012} = t_{01}t_{12}e^{-i\beta} + t_{01}r_{12}r_{10}t_{12}e^{-i3\beta} + t_{01}^2 r_{12}^2 r_{10}^2 t_{12}e^{-i5\beta} + \dots . \tag{12.16}$$

Je zřejmé, že toto je opět geometrická řada, jejíž součet s využitím (12.3) dává

$$t_{012} = \frac{t_{01}t_{12}e^{-i\beta}}{1 + r_{01}r_{12}e^{-i2\beta}} . \tag{12.17}$$

Pro relativní amplitudu odražené vlny r_{012} analogicky dostáváme

$$r_{012} = r_{01} + t_{01}r_{12}t_{10}e^{-i2\beta} + t_{01}r_{12}^2 r_{10}t_{10}e^{-i4\beta} + \dots , \tag{12.18}$$

což opět vede na geometrickou řadu, jejíž součet s využitím (12.3) dává

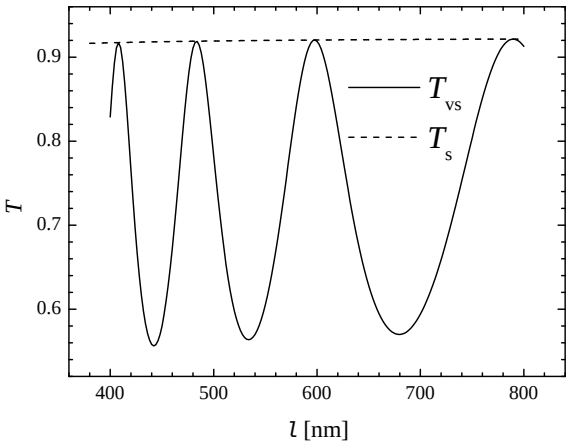
$$r_{012} = \frac{r_{01} + r_{12}e^{-i2\beta}}{1 + r_{01}r_{12}e^{-i2\beta}} . \tag{12.19}$$

Tato tenká vrstva je deponována na substrátu s indexem lomu N_2, viz obr. 12.3. Pro započtení příspěvku substrátu udělejme následující úvahu. Prvně si představme, že zde vrstva 1 není a máme zde jen prostředí 0, 2 a 3. Pro propustnost substrátu využijeme dříve obdrženého výsledku propustnosti tlusté vrstvy (12.9) pro nulový absorpční koeficient

$$T_{023} = \frac{n_3}{n_0}\frac{|t_{02}t_{23}|^2}{1 - |r_{20}r_{23}|^2} , \tag{12.20}$$

kde n_0 a n_3 jsou reálné části indexu lomu vstupního a výstupního prostředí. Vzhledem k tomu, že obojí je vzduch a tedy bereme $n_0 = n_3 = 1$, pak prefaktor n_3/n_0 v posledním vztahu mizí. Nyní využijeme úvahu, že propustnost celého systému tenké vrstvy na substrátu T_{0123} získáme z předchozího vztahu tím, že transmisní koeficient t_{02} nahradíme transmisním koeficientem celé tenké vrstvy t_{012}, viz pravá strana obr. 12.3. Toto můžeme udělat, protože koeficient t_{012} svazuje amplitudy elektrického pole v prostředí 0 s prostředím 2. Podobně koeficient r_{20} odrazu od tenké vrstvy zespodu nahradíme koeficientem odrazu na celé tenké vrstvě $r_{210} = -r_{012}$. Dostáváme tedy

$$T_{0123} = \frac{|t_{012}t_{23}|^2}{1 - |r_{012}r_{23}|^2} . \tag{12.21}$$



Obrázek 12.4: Ilustrační průběh propustnosti systému vrstva na substrátu, T_{vs}, (plná čára) odpovídající neabsorbující vrstvě s indexem lomu 2.6 nacházející se na substrátu s indexem lomu odpovídajícímu optickému sklu BK7. Propustnost samotného substrátu T_s je vynesena čárkovaně.

Dosazením vztahů (12.17) a (12.19) do (12.21) dostaneme propustnost všech vrstev T_{0123}. Označením $N_1 = n_{\mathrm{v}}$ jako indexu lomu vrstvy a $N_2 = n_s$ jako indexu lomu substrátu, po úpravách dostaneme pro propustnost T_{vs} celého systému tenké vrstvy a substrátu

$$T_{\mathrm{vs}} = T_{0123}(N_0 = N_3 = 1) = \frac{2n_{\mathrm{s}}}{1 + n_{\mathrm{s}}^2 + \frac{n_{\mathrm{v}}^2-1}{2}\left(1 - \frac{n_{\mathrm{s}}^2}{n_{\mathrm{v}}^2}\right)\sin^2(\beta)}\,. \tag{12.22}$$

Při kolmém dopadu v neabsorbující vrstvě je fázový faktor (12.6)

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} n_{\mathrm{v}} d\,. \tag{12.23}$$

Stojí za povšimnutí, že výsledek (12.22) je vzorec (12.13) v jehož jmenovateli je navíc člen díky interferenci ve vrstvě úměrný $\sin^2(\beta)$. Z výrazů (12.22) a (12.23) je zřejmé, že propustnost T_{vs} se mění při změně vlnové délky λ dopadajícího světla. Pro jisté vlnové délky při dané tloušťce vrstvy obdržíme maxima nebo minima propustnosti. Ze vztahu (12.22) vidíme, že pro $n_{\mathrm{v}} > n_{\mathrm{s}}$ bude mít T_{vs}

$$\text{maximum pro} \quad \sin\beta = 0,\ \text{tj. } \beta = \pi,\ 2\pi,\ \ldots\ m\pi,\ \ldots \tag{12.24a}$$

$$\text{minimum pro} \quad \sin\beta = \pm 1,\ \text{tj. } \beta = \frac{\pi}{2},\ 3\frac{\pi}{2},\ \ldots\ (2m-1)\frac{\pi}{2},\ \ldots \tag{12.24b}$$

kde m je celé číslo. Ze vztahu pro fázový posun (12.23) dostaneme

$$\text{maximum pro} \quad 2n_{\mathrm{v}} d = \lambda\,,\ 2\lambda\,,\ \ldots\ ,m\lambda\,, \tag{12.25a}$$

$$\text{minimum pro} \quad 2n_{\mathrm{v}} d = \frac{\lambda}{2}\,,\ \frac{3\lambda}{2}\,,\ \ldots\ ,\frac{(2m-1)\,\lambda}{2}\,. \tag{12.25b}$$

Ze vztahu (12.22) dostaneme pro hodnotu propustnosti v maximech a minimech

$$T_{\mathrm{vs}}^{\max} = \frac{2n_{\mathrm{s}}}{1 + n_{\mathrm{s}}^2}\,, \tag{12.26a}$$

$$T_{\mathrm{vs}}^{\min} = \frac{2n_{\mathrm{s}}}{1 + n_{\mathrm{s}}^2 + \frac{n_{\mathrm{v}}^2-1}{2}(1 - \frac{n_{\mathrm{s}}^2}{n_{\mathrm{v}}^2})}\,. \tag{12.26b}$$

Srovnáním rovnice (12.26a) s (12.13) je zřejmé, že maxima $T_{\mathrm{vs}}^{\max}$ odpovídají propustnosti substrátu. Tento výsledek můžeme interpretovat tak, že na těchto frekvencích dochází k destruktivní interferenci vln od tenké vrstvy – vzorek se tedy chová tak, jako by zde vrstva vůbec nebyla. Z propustnosti v maximech (12.26a) je tedy možné určit index lomu substrátu na odpovídajících vlnových délkách a závislost modelovat Cauchyovým vztahem (12.15). Takto je možno získat index lomu substrátu, což může být užitečné např. v situaci, kdy není k dispozici separátní vzorek substrátu nebo za účelem srovnání s daty z jiného měření. Obrázek 12.4 pro ilustraci ukazuje teoretickou závislost propustnosti T_{vs} (plná čára) odpovídající tenké vrstvě o tloušťce 450 nm a indexu lomu $n_{\mathrm{v}} = 2.6$ na substrátu z optického skla BK7. Propustnost samotného substrátu je vynesena čárkovanou čarou.
V minimech $T_{\mathrm{vs}}^{\min}$ je propustnost zmenšena přítomností vrstvy v závislosti na indexech lomu n_{s} a n_{v}. Vztah (12.26b) dává možnost z experimentálně změřené hodnoty $T_{\mathrm{vs}}^{\min}$ stanovit index lomu vrstvy n_{v} pro vlnové délky minim s použitím indexu lomu substrátu n_{s}. Vztah (12.26b) vede na bikvadratickou rovnici pro n_{v} jejíž řešení je

$$n_{\mathrm{v}}(\lambda) = \sqrt{-\frac{b(\lambda)}{2} + \sqrt{\frac{b(\lambda)}{2}^2 - n_{\mathrm{s}}(\lambda)^2}}\,, \qquad \text{kde} \qquad b(\lambda) = (n_{\mathrm{s}}(\lambda)^2 + 1) - \frac{4n_{\mathrm{s}}(\lambda)}{T_{\mathrm{vs}}^{\min}(\lambda)}\,. \tag{12.27}$$

V případě že $n_1 < n$, je role minim a maxim opačná, tzn., minima T_{vs} sledují propustnost substrátu a z maxim T_{vs} určujeme index lomu vrstvy.
Pro stanovení tloušťky tenké vrstvy je možná následující procedura. Z rovnic (12.25a) i (12.25b) vyplývá, že pro dvě sousední maxima i dvě sousední minima ve spektrální závislosti propustnosti, naměřená pro dvě vlnové délky λ a $\lambda' < \lambda$ platí

$$\frac{2n'_{\mathrm{v}}d}{\lambda'} = \frac{2n_{\mathrm{v}}d}{\lambda} + 1\,. \tag{12.28}$$

Odtud dostáváme vztah pro tloušťku vrstvy

$$d = \frac{\lambda\,\lambda'}{2(n'_{\mathrm{v}}\,\lambda - n_{\mathrm{v}}\,\lambda')}\,. \tag{12.29}$$

Výše popsaný postup na určení index lomu vrstvy a její tloušťky má své výhody – je možné výsledky získat pouze relativně jednoduchým výpočtem s použitím např. kalkulačky a proto se ho používalo často v dobách, kdy osobní počítače neexistovaly. Má ale také limity, např. umožňuje určit index lomu pouze na vlnových délkách minim propustnosti, tedy z celé spektrální závislosti jak experimentální tak teoretické využíváme pouze několik málo bodů. Dále by tento postup byl obtížně aplikovatelný ve složitějších případech, např. absorbující tenké vrstvy.
Tyto nedostatky jsou překonány v moderním přístupu zpracování spektroskopických dat, kdy se teoretická předpověď experimentu prokládá (tzv. fituje) na data a využívá se tak dat ve všech měřených vlnových délkách. Jako alternativní možnost zpracování této úlohy je tedy možné proložení teoretické závislosti (12.22) na měřenou propustnost. Je potřeba zde předpokládat spektrální závislosti indexů lomu $n_{\mathrm{v}}(\lambda)$ a $n_{\mathrm{s}}(\lambda)$ např. ve formě Cauchyho vztahu (12.15). Spektrální závislost substrátu $n_{\mathrm{s}}(\lambda)$ je možné vzít z předchozí části úlohy jako fixní, nebo je možné parametry Cauchyho modelu také fitovat současně s Cauchyho parametry vrstvy a tak z jednoho měření určit jak $n_{\mathrm{v}}(\lambda)$, $n_{\mathrm{s}}(\lambda)$ tak tloušťku vrstvy d. Vzorový program pro takové zpracování dat v jazyku python je k dispozici, viz [6].

Lambertův–Beerův zákon a absorpční koeficient

Uvažujme průchod záření absorbující tlustou vrstvou (tedy nedochází k interferenci). Propustnost takového vzorku jsme pro obecnou situaci odvodili na začátku úvodu, viz vztah (12.10). Při známé odrazivosti R_{01} tento vztah vede na kvadratickou rovnici pro α a je možné ho použít k určení

absorpčního koeficientu. Často v experimentu jsou však vnitřní odrazy zanedbatelné – buď jako důsledek malé odrazivosti R_{01}, která je např. v případě skla typicky 4%, nebo jako důsledek absorpce. V tomto případě se vztah (12.10) zjednoduší na

$$T = (1 - R_{01})^2 e^{-\alpha d} \,. \tag{12.30}$$

Velmi často také v případě propustnosti je absorpce malá a odpovídající hodnoty imaginární části indexu lomu takové, že citelně neovlivňují odrazivost R_{01}[22]. Potom poslední rovnice říká, že propustnost exponenciálně klesá s tloušťkou a absorpčním koeficientem. Toto je podstata tzv. Beerova–Lambertova zákona. Často také jsou reflexní ztráty zahrnuty do referenčního signálu a nebo jsou reflexní ztráty vzhledem k absorbci zanedbatelné (jako v případě našich vzorků) a pak vztah (12.30) nabývá jednoduchého tvaru

$$T = e^{-\alpha d} \,. \tag{12.31}$$

Lambertův–Beerův zákon (12.31) lze demonstrovat např. tak, že budeme měřit spektrální propustnost $T(\lambda)$ na planparalelních destičkách téže látky s různými tloušťkami. Vyneseme-li závislost $\ln T$ na tloušťce d vzorků dané látky pro určitou vlnovou délku, Beerův–Lambertův zákon (12.31) předpovídá lineární závislost, z jejíž směrnice lze určit koeficient absorpce α.

Popis spektrometrů a spektroskopických měření

K dispozici máte 2 spektrometry – standardní spektrofotometr s monochromátorem *Specord 40*, který měří spektrum na každé vlnové délce individuálně a sestavu s vláknovým spektrometrem *AvaSpec EDU*, který měří na všech poskytovaných vlnových délkách zároveň, tzv. multikanálově. V obou případech se používá stejný typ zdroje světla: kombinace halogenové žárovky (poskytující spektrum černého tělesa) a deuteriové výbojky (umožňující rozšířit měření do blízké UV oblasti). U přístroje Specord 40, který je standardizovaný přístroj pro spektrofotometrická měření, je vše skryto uvnitř těla spektrometru: mřížka je zde před vzorkovým prostorem a po odrazu na ní prochází světlo štěrbinou, která vybere světlo dané vlnové délky. Během měření se mřížka postupně natáčí a měří se propustnost vzorkem pro různé vlnové délky ve zvoleném rozsahu. Měření zde tedy trvá relativně dlouho, spektrální rozlišení může být poměrně vysoké (je určeno šířkou vstupní a výstupní štěrbiny) a přístroj je celkově poměrně citlivý díky značné velikosti detektoru. Doporučujeme provádět tedy měření na spektrometru *Specord 40*. U vláknového spektrometru je světlo z externího zdroje vedeno optickým vláknem k držáku vzorku, na jehož druhé straně prošlé světlo vstupuje do dalšího vlákna vedoucího do spektrometru. Zde je světlo odrazem na mřížce rozděleno podle vlnových délek a zrcadlem zaostřeno na jednotlivé pixely CCD detektoru (daný přístroj jich má zhruba 2000).

Při měření propustnosti je třeba provést referenční měření, kdy se naměří signál úměrný intenzitě dopadajícího záření. Obvykle se nechá záření procházet prázdným vzorkovým prostorem, případně s vloženou stejnou clonou, jakou pak budeme používat pro vzorek. Měříme pak relativní propustnost vůči vzduchu. Jelikož se spektrum vzorku a reference měří v různý čas, může výsledek ovlivnit nestabilita, např. zdroje (či detektoru). Pokročilejší přístroje jsou proto často navrženy jako dvoukanálové, kdy světlo střídavě prochází kanálem se vzorkem a bez něj. U přístrojů v tomto praktiku tomu tak není, doporučuje se tedy po zapnutí nechat jistý čas na stabilizaci, typicky alespoň 30 minut. Dále, vliv nestability přístroje se může do značné míry zmenšit, pokud se vždy před měřením provádí znovu referenční měření a tím se minimalizuje časový rozdíl mezi referenčním měřením a měřením vzorku. Výsledek měření je uložen v textovém formátu.

[22] Hodnoty imaginární části indexu lomu jsou typicky menší než jedna setina indexu lomu, pak v odrazivosti R, kde vystupují kvadráty těchto veličin, je vliv absorpce zanedbatelný.

Úkoly pro měření a zpracování dat

1. Určení spektrální závislosti indexu lomu neabsorbující tlusté vrstvy z měření propustnosti
   (a) Naměřte spektrální závislost propustnosti destičky optického skla BK7 v intervalu vlnových délek 350–1000 nm.
   (b) Z propustnosti stanovte index lomu pro všechny měřené vlnové délky pomocí vztahu (12.14) a vyneste tuto závislost do grafu.
   (c) Proložte tuto závislost Cauchyovým vztahem (12.15) pro interval vlnových délek 400 nm až 900 nm a taktéž ji zobrazte v grafu společně s daty. V textu uveďte získané hodnoty Cauchyových parametrů A a B včetně jejich chyb. Srovnejte je s tabulkovými hodnotami, viz např. [4].
2. Určení indexu lomu a tloušťky tenké vrstvy z propustnosti
   (a) Naměřte spektrální závislost propustnosti vzorku tenké vrstvy na substrátu v rozsahu 400–900 nm a vyneste ji do grafu společně s daty substrátu. Na základě srovnání zhodnoťte, zda má vrstva větší index lomu než substrát nebo naopak.
   (b) Určete hodnoty indexu lomu vrstvy ze všech extrémů spektrální závislosti propustnosti, které mají lichý interferenční řád (výraz (12.24b)) nebo pomocí fitování vztahu (12.22) na data, viz vzorový program [6].
   (c) Vyneste graficky závislost indexu lomu vrstvy na vlnové délce.
   (d) Určete hodnotu tloušťky vrstvy pomocí vztahu (12.29) nebo pomocí fitování vztahu (12.22) na data, viz vzorový program [6].
3. Lambertův–Beerův zákon a absorpční koeficient
   (a) Naměřte spektrální závislost propustnosti sérií destiček přiložených na sebe pro několik různých počtů destiček (1 až 4) umístěných ve vzorkovém prostoru spektrometru a vyneste je do grafu. Tloušťku destiček považujte za identickou: změřte tloušťku několika destiček, za výsledek vezměte průměrnou hodnotu.
   (b) Pomocí vztahu (12.31) ve zlogaritmované podobě určete, nakolik se data shodují s předpovědí Lambertova–Beerova zákona a určete absorpční koeficient dané látky za předpokladu, že nebereme v úvahu odrazy na rozhraních. Proveďte alespoň pro tři vlnové délky. Závislosti logaritmu propustnosti na tloušťce materiálu vyneste do grafu spolu s výsledkem lineární regrese.
   (c) Určete absorpční koeficient nezávisle pro každé spektrum propustnosti a vyneste všechny získané závislosti absorpčních koeficientů na vlnové délce do jednoho grafu. Diskutujte, jak souvisí subjektivně vnímaná barva daného materiálu se získanou spektrální závislostí absorpčního koeficientu.

Literatura k úloze 12

[1] H. Fujiwara: *Spectroscopic Ellipsometry: Principles and Applications*. John Wiley & Sons, 2007.

[2] H. Tompkins a E.A. Irene (editoři): *Handbook of Ellipsometry*. William Andrew, 2006.

[3] J. Kuběna: *Úvod do optiky*. Skripta MU Brno, 1994.

[4] `https://en.wikipedia.org/wiki/Cauchy's_equation`

[5] `https://en.wikipedia.org/wiki/Sellmeier_equation`

[6] Ukázkový fitovací program v jazyku python můžete stáhnout z interaktivní osnovy této úlohy.

Ústav fyziky kondenzovaných látek
Přírodovědecká fakulta, Masarykova univerzita, Brno

Fyzikální praktikum 2

A. Statistické zpracování měření

Návody pro statistické zpracování měření byly podrobně probrány v předmětu F2180 Fyzikální praktikum 1. Zde se proto omezíme pouze na připomenutí základních vztahů.

Statistický odhad přímo měřené fyzikální veličiny

Předpokládejme, že naměříme sadu N hodnot $\{x_1, x_2, \ldots, x_N\}$, pak odhadem střední hodnoty je aritmetický průměr $\bar{x}$

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i. \tag{A.1}$$

Směrodatná odchylka s se vypočte podle vztahu

$$s = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}. \tag{A.2}$$

Odhad nejistoty na hladině spolehlivosti P je

$$\Delta = t_{P,N-1}\frac{s}{\sqrt{N}}, \tag{A.3}$$

kde $t_{P,N-1}$ je Studentův koeficient pro hladinu spolehlivosti P a počet stupňů volnosti $\nu = N-1$. Intervalový odhad, ve kterém leží měřená hodnota s pravděpodobností P, je

$$(\bar{x} \pm \Delta) = \left(\bar{x} \pm t_{P,N-1}\frac{s}{\sqrt{N}}\right). \tag{A.4}$$

Statistické odhady nepřímo měřené veličiny

Hodnota nepřímo měřené fyzikální veličiny y je dána funkcí jedné či několika přímo měřených veličin; obecně pro funkci n veličin platí $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Mějme pro i-tou veličinu odhad střední hodnoty $\bar{x}_i$ a nejistoty Δ_i, pak odhad veličiny $\bar{y}$ je dán vztahem

$$\bar{y} = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n) \tag{A.5}$$

a odhad její nejistoty Δ_y podle zákona přenosu nejistot

$$\Delta_y = \sqrt{\left(\left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_{\bar{x}_1}\right)^2 \Delta_1^2 + \left(\left.\frac{\partial f}{\partial x_2}\right|_{\bar{x}_2}\right)^2 \Delta_2^2 + \cdots + \left(\left.\frac{\partial f}{\partial x_n}\right|_{\bar{x}_n}\right)^2 \Delta_n^2}. \tag{A.6}$$

Poznámka

Předchozí vztahy jsou odvozeny za mnoha předpokladů; mezi jinými jsou to předpoklady, že náhodné odchylky naměřených hodnot splňují Gaussovo rozdělení, jednotlivé naměřené hodnoty jsou statisticky nezávislé a podobně. Také v těchto vztazích nejsou zahrnuty další možné vlivy, jako odchylky měřicích přístrojů, či nevhodné metody zpracování. Tento návod je třeba brát pouze jako pomocný seznam několika potřebných vztahů. Pro detailnější rozbor odkazujeme na literaturu, která je dostupná v hojném počtu i v českém jazyce.

Tabulka A.1: Tabulka Studentových koeficientů $t_{P,\nu}$.

Počet stupňů volnosti ν	Hladina spolehlivosti P						
	0,50	0,6827	0,90	0,9545	0,98	0,99	0,9973
1	1,000	1,838	6,314	13,968	31,821	63,657	235,784
2	0,816	1,321	2,920	4,527	6,965	9,925	19,206
3	0,765	1,197	2,353	3,307	4,541	5,841	9,219
4	0,741	1,142	2,132	2,869	3,747	4,604	6,620
5	0,727	1,111	2,015	2,649	3,365	4,032	5,507
6	0,718	1,091	1,943	2,517	3,143	3,707	4,904
7	0,711	1,077	1,895	2,429	2,998	3,500	4,530
8	0,706	1,067	1,860	2,366	2,896	3,355	4,277
9	0,703	1,059	1,833	2,320	2,821	3,250	4,094
10	0,700	1,053	1,812	2,284	2,764	3,169	3,957
11	0,697	1,048	1,796	2,255	2,718	3,106	3,850
12	0,696	1,043	1,782	2,231	2,681	3,055	3,764
13	0,694	1,040	1,771	2,212	2,650	3,012	3,694
14	0,692	1,037	1,761	2,195	2,625	2,977	3,636
15	0,691	1,034	1,753	2,181	2,603	2,947	3,586
16	0,690	1,032	1,746	2,169	2,584	2,921	3,544
17	0,689	1,030	1,740	2,158	2,567	2,898	3,507
18	0,688	1,029	1,734	2,149	2,552	2,878	3,475
19	0,688	1,027	1,729	2,141	2,540	2,861	3,447
20	0,687	1,026	1,725	2,133	2,528	2,845	3,422
25	0,684	1,020	1,708	2,105	2,485	2,787	3,330
30	0,683	1,017	1,697	2,087	2,457	2,750	3,270
40	0,681	1,013	1,684	2,064	2,423	2,704	3,199
50	0,679	1,010	1,676	2,051	2,403	2,678	3,157
100	0,677	1,005	1,660	2,025	2,364	2,626	3,077
∞	0,675	1,000	1,645	2,000	2,326	2,576	3,000

Literatura k dodatku A

[1] P. Pánek: *Úvod do fyzikálních měření*, MU Brno 2001.

[2] J. Humlíček: *Statistické zpracování výsledků měření*, UJEP Brno 1984.

[3] M. Meloun a J. Militký: *Statistické zpracování experimentálních dat*, PLUS Praha 1994.

[4] A. Kučírková a K. Navrátil: *Fyzikální měření I.*, Státní pedagogické nakladatelství, Praha 1986.

Ústav fyziky kondenzovaných látek
Přírodovědecká fakulta, Masarykova univerzita, Brno

Fyzikální praktikum 2

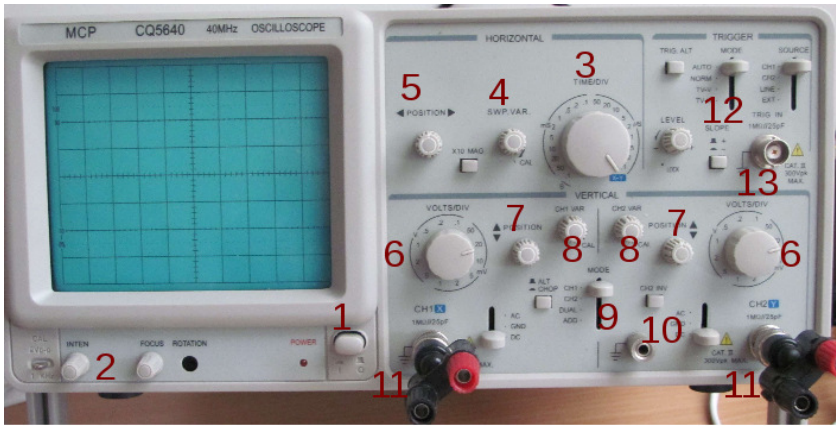
B. Návod k použití osciloskopu

Úvod

V mnoha úlohách Fyzikálního praktika 2 i jinde se používá osciloskop k měření časově závislých signálů. Osciloskopy jsou analogové nebo digitální; klasický analogový osciloskop pracuje s CRT obrazovkou, kdy se elektronový svazek vychyluje přivedeným napětím, zatímco digitální osciloskop převádí analogový vstupní signál do digitální podoby a s ním pak dále pracuje. Jiné dělení je možné podle počtu vstupních signálů (kanálů), které je možné současně měřit. Nejběžnější jsou jednokanálové a dvoukanálové osciloskopy, vyrábí se však i vícekanálové. V tomto návodu popíšeme základy práce na analogovém dvoukanálovém osciloskopu. Základní funkce a ovládání jiných typů osciloskopů jsou prakticky stejné; digitální osciloskopy umožňují komplexnější práci s naměřenými daty, případně jejich uložení na externí datové medium.
Tento návod obsahuje popis nejdůležitějších funkcí a základního ovládání běžných osciloskopů, kompletní popis všech funkcí poskytuje manuál výrobce toho kterého přístroje.

Základní ovládací prvky osciloskopu

Dva typické analogové dvoukanálové osciloskopy jsou zobrazeny na obrázcích B.1 a B.2. Tyto



Obrázek B.1: Osciloskop MCP CQ5640. Čísla označují umístění ovládacích prvků zmíněných v textu.

obrázky představují příklady umístění ovládacích prvků, skutečné umístění a přesné označení ovládacích prvků různých osciloskopů se může mírně lišit od označení zmíněných v textu. Naprostá většina dvoukanálových osciloskopů umožňuje funkce a má ovládací prvky zmíněné v tomto obecném návodu.
Základní ovládací prvky jsou hlavní vypínač (1), ostření stopy (obvyklé značení FOCUS) a nastavení intensity světelné stopy (2 – INTENSITY). Tato nastavení není obvykle třeba upravovat, špatné zaostření se projeví rozmazáním měřených křivek. Intensitu nastavujeme tak,

aby byly měřené křivky dostatečně jasné, ale aby naopak nedocházelo ke zbytečnému „vypalování“ obrazovky.

Přivedení signálu

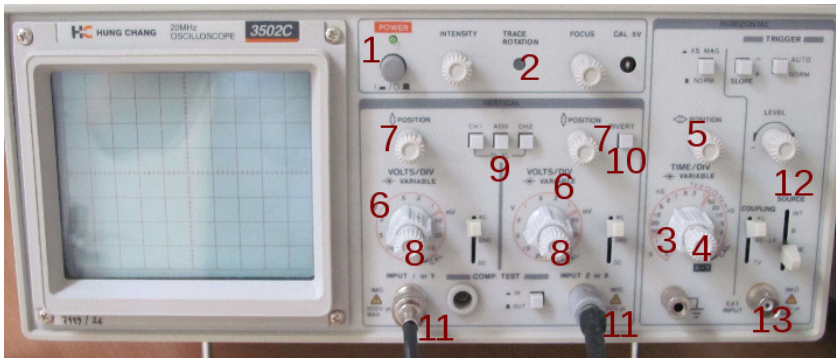
Obvyklým vstupem osciloskopu je BNC konektor pro připojení koaxiálního kabelu (11). Pro měření nízkofrekvenčních signálů můžeme na BNC konektor připojit redukci na banánky jako na obrázku B.1. Jeden ze vstupních kontaktů obou konektorů bývá uzemněn (vnější kontakt BNC konektoru) a pokud je některý z kontaktů v obvodu také uzemněn, je třeba propojit uzemněné kontakty navzájem. Zejména je třeba mít tento fakt na paměti při měření dvou různých signálů z jednoho obvodu a připojit společný kontakt k zemněným kontaktům. Nepropojíme-li správně zemněné kontakty, můžeme v obvodu způsobit zkrat.

Ovládání časové základny

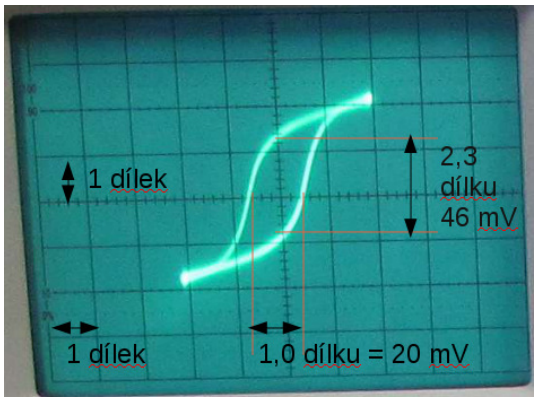
Základním prvkem je přepínač rozsahu časové osy (3 – TIME/DIV). Nastavený čas pak odpovídá jednomu dílku na obrazovce osciloskopu (obvykle odpovídá 1 cm). Časovou základnu je také možné spojitě měnit knoflíkem (4 – VARIABLE), chceme-li odečítat absolutní časovou hodnotu je nutno tento knoflík otočit do kalibrované polohy označené CAL. nebo CALIB. – obvykle krajní poloha vpravo. Další je otočný knoflík pro posun křivky vlevo či vpravo (5 – ⇔POSITION).

Ovládání napěťové základny

Každý z kanálů má vlastní ovládací prvky zřetelně oddělené, ale identické. Základem je opět přepínač rozsahů (6 – VOLTS/DIV), a spojitý měnič rozsahů (8 – VARIABLE). Podobně jako u časové základny pak napětí uvedené na přepínači odpovídá jednomu dílku na obrazovce osciloskopu, pouze pokud je knoflík spojité změny rozsahu v kalibrované poloze (obvykle krajní poloha vpravo). Posun křivky nahoru a dolů nezávisle pro každý kanál je možno knoflíkem (7 – ⇕POSITION). Druhý kanál má obvykle k dispozici tlačítko pro zobrazení převráceného signálu (10 – INVERT nebo CH2 INV). Pro vybírání zobrazeného signálu slouží přepínač (9), který umožňuje vybrat zobrazení signálu z prvního nebo druhého kanálu, či obou současně nebo součtu signálů z obou vstupů. Pro zobrazení jejich rozdílu se použije zobrazení součtu vstupu prvního kanálu a invertovaného vstupu na druhém kanálu. Při sčítání nebo odečítání signálů je třeba dbát na nastavení stejného rozsahu na obou vstupech.
Většina osciloskopů dále obsahuje přepínač, kterým můžeme odstranit stejnosměrnou složku, pokud pro nás není zajímavá. Tento přepínač bývá označen DC/AC/GROUND. V poloze AC (alternating current – střídavý proud) je ke vstupu připojen kondenzátor, který odfiltruje stejnosměrnou složku. V poloze DC (direct current – stejnosměrný proud) je vstup přímo



Obrázek B.2: Osciloskop Hung chang 3502C. Čísla označují umístění ovládacích prvků zmíněných v textu. Knoflíky 4 a 8 jsou umístěny ve středu přepínačů 3 a 6.



Obrázek B.3: Odečítání z obrazovky osciloskopu v X-Y režimu. Oba kanály jsou přepnuty na rozsah 20 mV/dílek. Vodorovná vzdálenost odpovídá 20 mV, svislá 46 mV.

zobrazován včetně stejnosměrné složky. Pro odečítání absolutní hodnoty stejnosměrné složky je třeba porovnat s nulovou hladinou, pro tento účel můžeme použít polohu GROUND, kdy je vstup osciloskopu uzemněn.

Zobrazení v X-Y režimu

Často se používá také zobrazení napětí na druhém vstupu jako funkce napětí na prvním vstupu, tzv. X-Y režim. Používá se například pro zobrazení volt-ampérových charakteristik nelineárních prvků, kdy jako veličinu úměrnou proudu přivádíme napětí na sériově připojeném rezistoru, nebo hysterezní smyčky v úloze 5. Pro přepnutí do X-Y režimu slouží buď zvláštní přepínač, nebo se často objevuje jako krajní poloha přepínače časové škály (3), jako v případě obou zobrazených osciloskopů. Škálu na vodorovné ose pak ovládáme ovladači pro první kanál (6, 7, 8), ovladače časové základny (4, 5) nemají na zobrazení žádný vliv.

Odečítání z osciloskopu

Před zahájením odečítání na osciloskopu musíme nejprve nastavit ovladače napěťových a časových rozsahů do kalibrované polohy (ovladače 4 a 8). Opomeneme-li nastavit kalibrované polohy, odečítáme pak naprosto nesmyslné hodnoty!
Další postup je pak už přímočarý – pro snazší odečítání si můžeme posunout křivky nahoru, dolů či do stran tak, aby se nám snadno odečítaly vzdálenosti pomocí zobrazené sítě. Jednomu dílku zobrazené sítě odpovídá nastavený rozsah přepínačem (přepínač časové základny 3, či napěťového rozsahu 6). Jeden dílek odpovídá obvykle 1 cm, proto můžeme alternativně použít k odečítání pravítko. Měříme-li v X-Y režimu, pak se rozsah i na vodorovné ose přepíná napěťovým přepínačem prvního kanálu (6). Příklad odečítání z obrazovky v X-Y režimu je na obrázku B.3. Některé osciloskopy (převážně digitální) umožňují odečítání pomocí pohyblivých kurzorů, použití kurzoru je pak intuitivní, nastavíme si kurzory vzdálenost, kterou chceme měřit, a odečteme odpovídající číselnou hodnotu časového intervalu nebo napětí na obrazovce.

Synchronizace

Další funkce osciloskopů je nastavení synchronizace nebo také spouštěcího signálu (12 – TRIGGER). Při zobrazení periodického signálu je vhodné, aby se opakovaný průběh zobrazoval stále do stejného místa. Jinak je pozorování stále se měnících křivek velmi nepohodlné a při vyšších frekvencích nemožné. K tomu slouží mechanismus synchronizace, který začne zobrazovat křivku v krajní levé poloze obrazovky vždy ve stejném nastaveném bodě. Toto nastavení vychází z předpokladu, že měřené napětí periodicky klesá a stoupá. V nastavení synchronizace je možné

vybrat, zdali má zobrazení začít ve stoupající či klesající části průběhu a dále pak nastavit při dosažení jakého napětí má zobrazení začít. Dále je možné vybrat, který vstupní kanál se má pro sychronizaci použít, případně je možně k synchronizaci využít externí signál, pro který bývá vyveden zvláštní konektor (13). K sychronizaci je třeba použít signál, který má dostatečnou amplitudu vzhledem k šumu v obvodu. Pokud má přiváděný signál příliš malou napěťovou amplitudu (srovnatelnou se šumem), bývá dosažení správné synchronizace velmi obtížné.