Ústav fyziky kondenzovaných látek
Přírodovědecká fakulta, Masarykova univerzita, Brno

Fyzikální praktikum 2

1. Studium elektromagnetické indukce

Úkoly k měření

- Změřte tvar napěťových pulzů na cívce v závislosti na výchylce kyvadla s magnetem.
- Z předchozí závislosti určete poloměr cívky a magnetický moment magnetu.
- Studujte tlumení indukovaných pulzů.

Závislost indukovaných pulzů na výchylce

Teorie

Jedním z pilířů elektrodynamiky je Faradayův zákon [1], který vyjadřuje vztah mezi napětím U indukovaným v uzavřené smyčce a časovou změnou magnetického toku Φ procházejícího plochou smyčky:

$$U = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} . \tag{1.1}$$

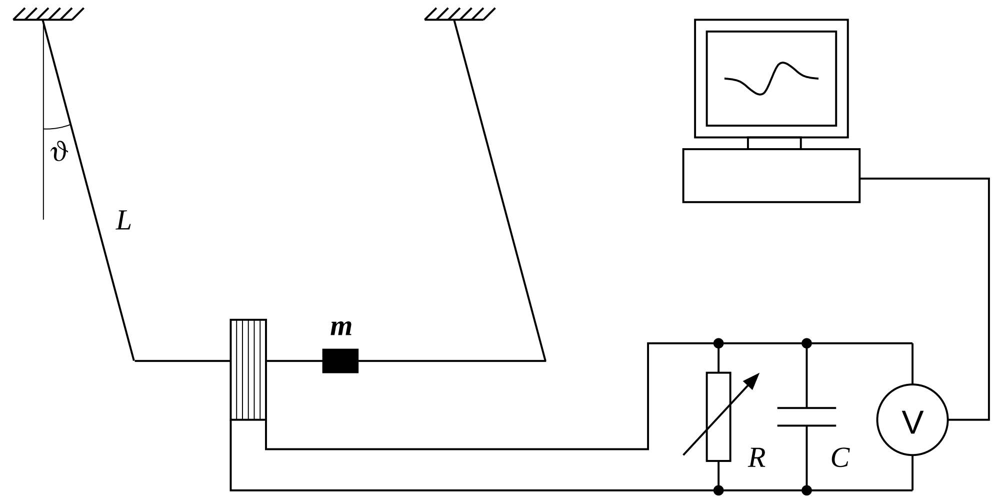
V této úloze[1] budeme studovat elektromagnetickou indukci v systému znázorněném na obrázku 1.1. Zdrojem magnetického pole je permanentní magnet upevněný na dvojitém kyvadle. Při kmitavém pohybu magnet periodicky prolétává cívkou a indukuje v ní napěťové pulzy, jejichž časovou závislost zaznamenáváme.

Aby mohla být hodnota měřeného napětí přenesena do počítače, je třeba ji převést do číselné podoby. K tomu slouží tzv. analogově-digitální (AD) převodník – zařízení, na jehož vstupu je analogový signál (v našem případě napětí a převodník tak slouží jako voltmetr) a na výstupu číselná (digitální) reprezentace tohoto signálu. AD-převodník použitý v praktiku má rozlišení 8 bitů, tedy osm číslic ve dvojkové soustavě. Je schopen rozeznat $2^8 = 256$ úrovní napětí, což při jeho napěťovém rozsahu 2,5 V představuje měření s přesností 0,01 V.

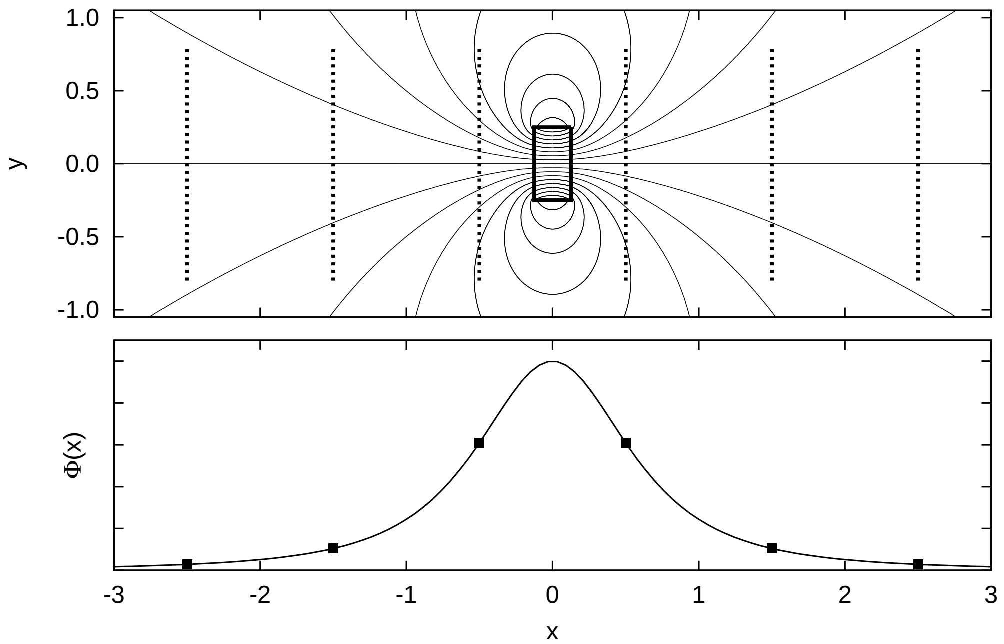
Průběh indukovaných napěťových pulzů

K indukci měřitelného napěťového pulzu dochází, pokud se magnet pohybuje v blízkosti snímací cívky. Pohyb magnetu vůči cívce v této oblasti můžeme pro jednoduchost nahradit rovnoměrným pohybem magnetu po ose cívky, popřípadě cívky po ose magnetu. Na obrázku 1.2 je ukázáno magnetické pole válcového permanentního magnetu. Uvažujme o cívce, která se pohybuje v poli magnetu, přičemž osa cívky splývá s osou magnetu. Tok magnetických indukčních čar cívkou v závislosti na vzdálenosti cívky od magnetu je vynesen ve spodní části obrázku 1.2. Napětí, které se v ní indukuje při jejím pohybu po ose, je podle Faradayova zákona (1.1) rovno záporně vzaté časové derivaci magnetického indukčního toku cívkou. Přibližuje-li se cívka k magnetu, vzrůstá tok její plochou a objevuje se záporné indukované napětí. Při průchodu kolem magnetu dosahuje magnetický indukční tok maxima, jeho časová derivace a tedy indukované napětí je v tomto bodě rovno nule. Konečně při vzdalování indukční tok klesá a indukované napětí je kladné. Svého

[1]Sestavení úlohy bylo inspirováno článkem [2].



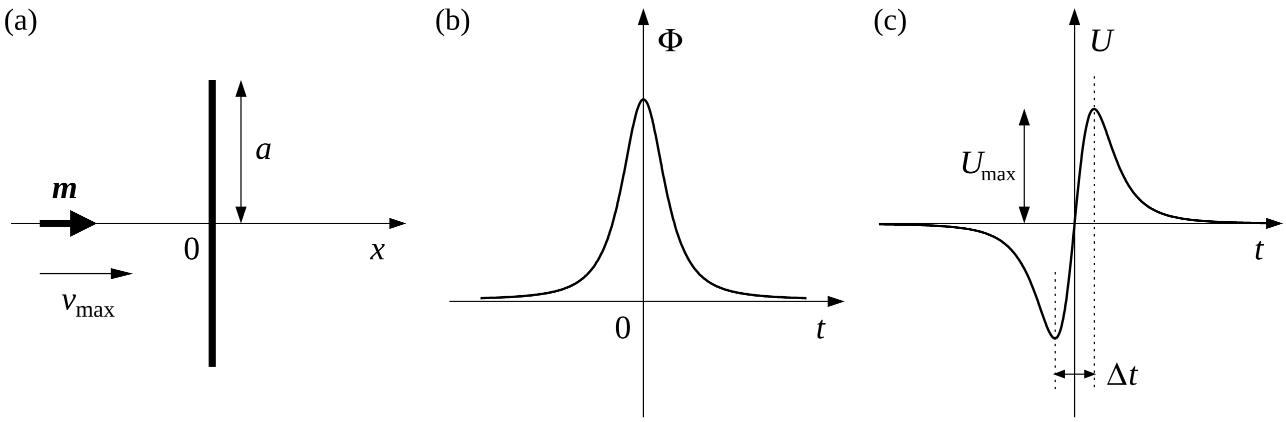
Obrázek 1.1: Schéma experimentálního uspořádání. Permanentní magnet prolétávající cívkou v ní indukuje napětí, které je snímáno počítačem. Cívka je zatížena proměnným rezistorem o odporu R, což omezuje proud v obvodu a tím přímo ovlivňuje elektromagnetické tlumení pohybu magnetu. Pro potlačení vysokofrekvenčního šumu můžeme paralelně k rezistoru zapojit kondenzátor s malou kapacitou C (řádově 100 nF).



Obrázek 1.2: Nahoře: Indukční čáry magnetického pole válcového magnetu, jehož osa je totožná s osou x. Dole: Magnetický indukční tok cívkou souosou s magnetem v závislosti na její vzdálenosti od magnetu. Polohy cívky pro zvýrazněné body na křivce jsou znázorněny přerušovanými čarami v horním panelu.

maxima (minima) nabude indukované napětí v místě, kde magnetický indukční tok klesá (roste) nejstrměji. Amplituda napěťového pulzu závisí na rychlosti pohybu. Čím rychleji se vůči sobě cívka a magnet pohybují, tím rychlejší jsou změny indukčního toku cívkou, což má podle Faradayova zákona za následek vyšší hodnotu indukovaného napětí.

Jednoduchý kvantitativní popis našeho experimentu je možný v přiblížení, kdy permanentní magnet nahradíme magnetickým dipólem a cívku kruhovým závitem. Dále budeme pohyb mag-



Obrázek 1.3: (a) Boční pohled na kruhový závit o poloměru a, jímž prolétá magnet s dipólovým momentem $\boldsymbol{m}$. (b) Časová závislost magnetického indukčního toku. (c) Napětí indukované v kruhovém závitu.

netu v těsné blízkosti cívky aproximovat rovnoměrným přímočarým pohybem po ose cívky rychlostí $v_{\max}$, která odpovídá nejnižšímu bodu skutečné kruhové trajektorie. Zjednodušená situace je znázorněná na obrázku 1.3(a). Magnetické pole magnetického dipólu je dáno vztahem [3, 4] (v jednotkách SI[2])

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3}\left[\frac{3(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{m})\boldsymbol{r}}{r^2} - \boldsymbol{m}\right] , \tag{1.2}$$

kde $\boldsymbol{r}$ je polohový vektor vztažený na magnetický dipól, $\boldsymbol{m}$ magnetický dipólový moment a μ_0 je permeabilita vakua. Snadným výpočtem lze ověřit, že magnetický indukční tok pole magnetického dipólu orientovaného ve směru osy x plochou kruhového závitu je roven

$$\Phi(x) = \int_S \boldsymbol{B}\ \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{\mu_0 m}{2}\frac{a^2}{(a^2+x^2)^{3/2}} , \tag{1.3}$$

kde a je poloměr kruhového závitu, do jehož středu umístíme počátek osy x.

K určení napětí indukovaného v závitu při pohybu magnetu užijeme Faradayův zákon (1.1). Nechť v čase $t = 0\,\mathrm{s}$ prochází dipól středem cívky, pak je jeho souřadnice x vyjádřena vztahem $x = v_{\max}t$. Provedeme-li za tohoto předpokladu časovou derivaci magnetického indukčního toku (1.3), získáme pro napětí indukované v cívce s N závity:

$$U(t) = -N\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = \frac{3N\mu_0 m v_{\max}}{2a^2}\frac{v_{\max}t/a}{[1+(v_{\max}t/a)^2]^{5/2}} . \tag{1.4}$$

Časový průběh magnetického indukčního toku a indukovaného napětí jsou vykresleny na obrázku 1.3(b) a 1.3(c). Křivka závislosti indukovaného napětí na čase obsahuje jedno minimum a jedno maximum, které nám umožní zavést šířku pulzu Δt jako časový rozdíl mezi okamžikem maximálního a minimálního napětí a amplitudu napěťového pulzu $U_{\max}$. Je-li indukované napětí popsáno rovnicí (1.4), najdeme minimum napětí v bodě $t_{\min} = -a/2v_{\max}$ a jeho maximum v bodě $t_{\max} = +a/2v_{\max}$. Šířka pulzu je tedy nepřímo úměrná rychlosti průletu:

$$\Delta t = a\,v_{\max}^{-1} . \tag{1.5}$$

Dále můžeme určit amplitudu napětí

$$U_{\max} = \frac{24}{25\sqrt{5}}\frac{N\mu_0 m}{a^2}\,v_{\max} , \tag{1.6}$$

[2]Jednotkou magnetické indukce je 1 T (tesla). Pojmenována byla po srbském fyzikovi Nikolu Teslovi (1856–1943). Oproti soustavě CGS (kde je jednotkou indukce Gauss), zde ve vzorci figuruje magnetická permeabilita vakua μ_0.

která je naopak přímo úměrná rychlosti prolétajícího magnetu.

Zbývá určit rychlost $v_{\max}$, nejsnáze ze zákona zachování energie. Je-li hmotnost magnetu spolu s jeho nosníkem rovna M, platí

$$\frac{1}{2}Mv_{\max}^2 = MgL(1-\cos\vartheta_{\max})\,, \tag{1.7}$$

kde g je zemské tíhové zrychlení, L délka kyvadla a $\vartheta_{\max}$ úhlová amplituda jeho kmitů. Odtud

$$v_{\max} = 2\sqrt{gL}\,\sin\left(\frac{\vartheta_{\max}}{2}\right) \approx \sqrt{gL}\,\vartheta_{\max}\,. \tag{1.8}$$

Úkoly

1. Změřte závislost amplitudy a šířky napěťového pulzu indukovaného v cívce na úhlové amplitudě kmitů (a tedy na rychlosti magnetu prolétajícího cívkou) a zjistěte, zda přibližně platí, že $U_{\max}$ je přímo úměrné úhlu $\vartheta_{\max}$ ($U_{\max} \sim \vartheta_{\max}$) a čas Δt nepřímo úměrný tomuto úhlu ($\Delta t \sim \vartheta_{\max}^{-1}$). Spolu s naměřenými hodnot vyneste i přímku odpovídající modelové lineární závislosti.
2. Užitím vztahu (1.5) mezi šířkou pulzu a rychlostí průletu určete efektivní poloměr použité cívky. S pomocí parametrů cívky a vztahu (1.6) dále odhadněte magnetický dipólový moment použitého magnetu.

Tlumení pohybu magnetu

Teorie

V předchozí části jsme uvažovali o netlumeném kmitavém pohybu magnetu s konstantní amplitudou výchylky. Ve skutečnosti bude ovšem pohyb tlumený a to mechanicky (kvůli odporu vzduchu) a elektromagneticky (je-li obvod snímací cívky propojen a zátěžový odpor R není příliš velký). Časová závislost poklesu amplitudy v důsledku těchto dvou tlumení má odlišný charakter, který nám umožní v experimentu rozlišit režim s převážně mechanickým a převážně elektromagnetickým tlumením.

Vyšetříme nejprve případ mechanického tlumení, přičemž budeme sledovat úbytek mechanické energie $E = Mv_{\max}^2/2$. Předpokládejme, že odporová síla způsobená třením o vzduch při nízkých rychlostech je úměrná rychlosti magnetu[3], $F = kv$. Pokud je tlumení pohybu malé, můžeme pohyb magnetu během jednoho kyvu popsat vztahem $\vartheta = \vartheta_{\max}\cos\omega t$, kde $\vartheta_{\max}$ je amplituda kmitů v daném okamžiku a $\omega = 2\pi/T$ je frekvence kmitů. Rychlost magnetu je v tomto případě rovna $v = -v_{\max}\sin\omega t$, kde $v_{\max} = \vartheta_{\max}\omega L$. Úbytek mechanické energie během jednoho kyvu, který získáme integrací výkonu odporové síly

$$\Delta E = \int_0^{T/2} Fv\,\mathrm{d}t = \int_0^{T/2} k\,v_{\max}^2\sin^2\omega t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}Tk\,v_{\max}^2\,, \tag{1.9}$$

je malý vůči E a pro pozvolna klesající E je tak možné sestavit diferenciální rovnici

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} \approx -\frac{\Delta E}{T/2} = -\frac{1}{2}k\,v_{\max}^2 = -\frac{k}{M}E\,. \tag{1.10}$$

Řešením této rovnice s počáteční podmínkou $E(0) = E_0$ zjistíme, že mechanická energie, maximální rychlost magnetu i amplituda jeho kmitů exponenciálně klesají s časem

$$E(t) = E_0\,\mathrm{e}^{-kt/M}\,,\quad v_{\max}(t) \sim \sqrt{E} \sim \mathrm{e}^{-\beta t}\,,\quad \vartheta_{\max}(t) \sim \mathrm{e}^{-\beta t}\,,\quad \text{kde}\quad \beta = \frac{k}{2M}\,. \tag{1.11}$$

[3] Lineární závislost odporu na rychlosti je vhodným přiblížením pro malé výchylky (a rychlosti) kyvadla, vedoucí k výsledkům v dostatečném souladu s experimentálně stanoveným poklesem amplitudy.

Nyní uvažujme o případu, kdy je tlumení pohybu magnetu čistě elektromagnetické. Ke ztrátě mechanické energie dojde při průletu magnetu cívkou, kdy indukované napětí vyvolá proud cívkou a její pole pak brzdí pohyb magnetu. Úbytek mechanické energie během jednoho kyvu stanovíme pomocí ztrátového výkonu na zatěžovacím odporu R a vlastním odporu cívky R_c

$$\Delta E = \int_{\text{průlet}} U\,I \mathrm{d}t = \int_{\text{průlet}} \frac{U^2}{R+R_c}\,\mathrm{d}t\,. \tag{1.12}$$

Vzhledem k tomu, že amplituda napětí je úměrná $v_{\max}$ a čas průletu je úměrný $v_{\max}^{-1}$, je úbytek energie úměrný $v_{\max}$. Podrobný výpočet využívající vztahu (1.4) ukazuje, že

$$\Delta E = K\,v_{\max}\,, \quad \text{kde} \quad K = \frac{45\pi}{512}\frac{N^2\mu_0^2 m^2}{(R+R_c)a^3}\,. \tag{1.13}$$

V analogii s rovnicí (1.10) můžeme psát

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} \approx -\frac{\Delta E}{T/2} = -\frac{2K}{T}\,v_{\max} = -\frac{2K}{T}\sqrt{\frac{2E}{M}} \qquad \text{odkud} \qquad \sqrt{E(t)} = \sqrt{E_0} - \frac{K}{T}\sqrt{\frac{2}{M}}\,t\,. \tag{1.14}$$

Jelikož $\vartheta_{\max}(t) \sim v_{\max}(t) \sim \sqrt{E}$, dostáváme lineární pokles amplitudy kmitů v čase

$$\vartheta_{\max}(t) = \vartheta_{\max}(0) - \alpha t\,, \quad \text{kde} \quad \alpha = \frac{2K}{TM\sqrt{gL}}\,. \tag{1.15}$$

Tento vztah je možné použít, dokud je amplituda kmitů dostatečně velká. Poté přestává platit rovnice (1.13) a především výchozí předpoklad o malém relativním úbytku mechanické energie během jednoho kyvu.

Při určení amplitudy kmitů z amplitudy indukovaného napětí je třeba vzít v úvahu, že změřená amplituda napětí je nižší než indukovaná vlivem dělení na odporech v obvodu. Pro proud v obvodu platí

$$I = \frac{U_{\text{max,induc}}}{R+R_c} \tag{1.16}$$

a zároveň pro napětí měřené pouze na zatěžovacím odporu

$$I = \frac{U_{\text{max,meas}}}{R} \tag{1.17}$$

Pro toto napětí pak dostaneme

$$U_{\text{max,meas}} = U_{\text{max,induc}}\frac{R}{R+R_c}\,. \tag{1.18}$$

Tato oprava je podstatná pro malé hodnoty zatěžovacího odporu R. Závislost amplitudy napětí na výchylce byla měřena v povinné části. Alternativně je možno určit amplitudu kmitů z šířky pulzu Δt, kde není žádná korekce nutná.

Úkoly

1. Pro několik hodnot zatěžovacího odporu R sledujte tlumení kmitavého pohybu magnetu a určete časovou závislost amplitudy kmitů $\vartheta_{\max}$. Využijte přitom amplitudy napětí (s korekcí dle (1.18)) event. šířky jednotlivých napěťových pulzů. V případě malého zatěžovacího odporu byste měli pozorovat lineární pokles amplitudy kmitů (1.15), v opačném případě je charakter poklesu spíše exponenciální (1.11).

2. Zjistěte, zda je směrnice α poklesu amplitudy kmitů pro případ dominantního elektromagnetického tlumení nepřímo úměrná $R+R_c$, jak předpovídá teorie (např. proložením závislosti hodnot $1/\alpha$ na R přímkou, průsečík s osou x by měl odpovídat hodnotě $-R_c$).

3. Stanovte koeficient útlumu β pro případ převládajícího mechanického tlumení.[4]

[4]NB: Parametry α a β mají (různé) jednotky.

Literatura:

[1] R.P. Feynman, R.B. Leighton, M. Sands: *Feynmanovy přednášky z fyziky s řešenými příklady 2/3*, Fragment (2006).

[2] A. Singh, Y.N. Mohapatra, S. Kumar, Am. J. Phys. **70**, 424 (2002).

[3] D. Griffith: *Introduction to electrodynamics*, Prentice-Hall (1999).

[4] J.D. Jackson: *Classical electrodynamics*, Willey (1999).