Ústav fyziky kondenzovaných látek
Přírodovědecká fakulta, Masarykova univerzita, Brno

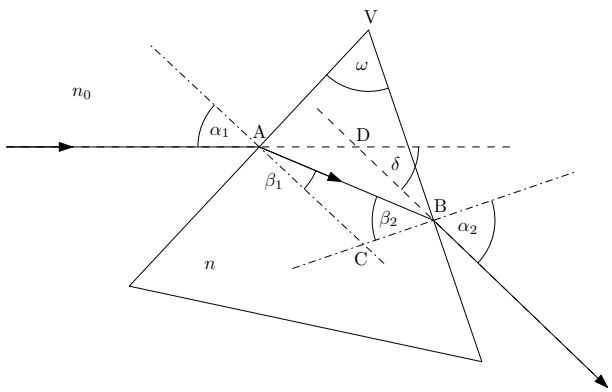
Fyzikální praktikum 2

9. Závislost indexu lomu skla na vlnové délce

Měření závislosti indexu lomu skla na vlnové délce metodou minimální deviace

Úvod

Metodu minimální deviace lze použít ke stanovení indexu lomu vzorků (sklo, plasty, atd.), které mají tvar hranolu. Při experimentu dvě sousední stěny hranolu, kterými vstupuje a vystupuje paprsek, spolu svírají lámavý uhel ω (viz obr. 9.1), jenž spolu s indexem lomu tvoří parametry hranolu. Paprsek vystupující z hranolu je od vstupujícího paprsku odchýlen o úhel δ, nazývaný deviace, který závisí na úhlu dopadu α_1. Po analýze této závislosti zjistíme, že pro určitý úhel dopadu vykazuje deviace minimum, δ_m.



Obrázek 9.1: Průchod paprsku světla hranolem.

Nyní odvoďme závislost úhlové odchylky δ vystupujícího paprsku na úhlu dopadu $\alpha_1 = \alpha$, lámavém úhlu ω a na indexu lomu skla n a uvažme její průběh. Zákon lomu na prvním rozhraní je

$$n_0 \sin\alpha = n \sin\beta_1, \tag{9.1}$$

kde n_0 je index lomu prostředí obklopující hranol, a na druhém rozhraní

$$n \sin\beta_2 = n_0 \sin\alpha_2 \tag{9.2}$$

Deviace δ je vnější úhel v trojúhelníků ABD při vrcholu D a tedy můžeme napsat

$$\delta = (\alpha - \beta_1) + (\alpha_2 - \beta_2). \tag{9.3}$$

Lámavý úhel ω je vnějším úhlem při vrcholu C v trojúhelníku ABC, neboť strana AC je kolmá k prvnímu rozhraní AV a strana BC je kolmá k druhému rozhraní BV, tedy:

$$\omega = \beta_1 + \beta_2. \tag{9.4}$$

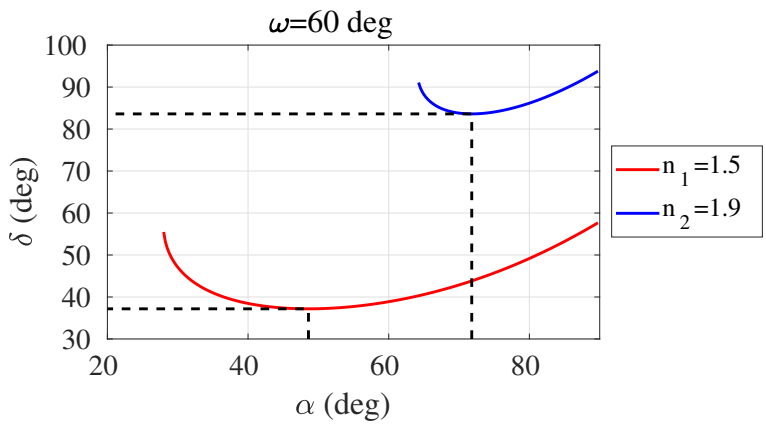
Deviace δ je pak podle (9.3) a (9.4) rovna

$$\delta = \alpha + \alpha_2 - \omega. \tag{9.5}$$

Vyjádříme–li α_2 ze vztahů (9.1), (9.2), (9.4) a (9.5), obdržíme závislost deviace na úhlu dopadu α ve tvaru

$$\delta = f(\alpha,\, \omega,\, n,\, n_0) = \alpha - \omega + \arcsin\left[\sin\omega\sqrt{\left(\frac{n}{n_0}\right)^2 - \sin^2\alpha} - \cos\omega\sin\alpha\right]. \tag{9.6}$$

Tato závislost má pro realistické případy indexu lomu skla n a vrcholových úhlů ω jedno minimum



Obrázek 9.2: Závislost deviace paprsku na úhlu dopadu na stěnu hranolu pro indexy lomu hranolu $n_1 = 1.5$ (červená čára) a $n_2 = 1.9$ (modrá čára) vykreslená pro úhly dopadu pro něž je realizovatelný průchod paprsku přes výstupní stěnu hranolu. Závislost je vynesena pro vrcholový úhel $\omega = 60\,°$. Přerušované čáry vyznačují polohy příslušných minim deviace paprsku.

(viz obr. 9.2). Odvození podmínky pro minimum deviace z (9.6) je poněkud zdlouhavé. Elegantněji dojdeme k výsledku s použitím vztahu (9.5)[3], jehož derivace podle α musí být v minimu nutně rovna 0, tedy

$$\frac{\mathrm{d}\delta}{\mathrm{d}\alpha} = 1 + \frac{\mathrm{d}\alpha_2}{\mathrm{d}\alpha} = 0. \tag{9.7}$$

Diferencováním Snellova zákona pro první a druhou lámavou plochu, tj. rovnicí (9.1) resp. (9.2), obdržíme

$$n_0 \cos\alpha\, \mathrm{d}\alpha = n \cos\beta_1\, \mathrm{d}\beta_1$$

a

$$n_0 \cos\alpha_2\, \mathrm{d}\alpha_2 = n \cos\beta_2\, \mathrm{d}\beta_2.$$

Podělením těchto dvou rovnic a s použitím diferencované formy vztahu (9.4), $\mathrm{d}\beta_1 = -\mathrm{d}\beta_2$, dostáváme

$$\frac{\mathrm{d}\alpha_2}{\mathrm{d}\alpha} = -\frac{\cos\alpha \cdot \cos\beta_2}{\cos\alpha_2 \cdot \cos\beta_1}. \tag{9.8}$$

Po dosazení do podmínky pro minimum (9.7) a s využitím Snellova zákona obdržíme

$$\frac{1 - \sin^2\alpha}{1 - \sin^2\alpha_2} = \frac{\frac{n}{n_0} - \sin^2\alpha}{\frac{n}{n_0} - \sin^2\alpha_2}. \tag{9.9}$$

Úhel dopadu α, pro který je tato rovnost splněna tedy vede k nutné podmínce minima deviace δ, $\frac{\mathrm{d}\delta}{\mathrm{d}\alpha} = 0$. Protože je $\frac{n}{n_0} > 0$, z rovnice (9.9) vyplývá, že úhel dopadu na hranol se rovná úhlu

výstupu $\alpha = \alpha_2$ a tedy $\beta_1 = \beta_2$. To znamená, že paprsek, pro který je deviace minimální, prochází hranolem symetricky vzhledem k rovině půlící vrcholový úhel hranolu (tj. úhel ω při vrcholu V na obr. 9.1). Po dosazení do (9.5) a (9.4) obdržíme $\alpha = \frac{\delta_\mathrm{m}+\omega}{2}$ resp. $\beta_1 = \frac{\omega}{2}$ a pod dosazení do Snellova zákona (9.1) pří aproximaci $n_0 \approx 1$ pro vzduch dostáváme vztah svazující index lomu materiálu hranolu s vrcholovým úhlem a minimální deviací δ_m

$$n = \frac{\sin([\delta_\mathrm{m} + \omega]/2)}{\sin(\omega/2)}. \tag{9.10}$$

Vrcholový úhel hranolu a minimální deviace jsou experimentálně relativně lehko měřitelné veličiny a nyní vidíme, že z nich můžeme určit i index lomu, aniž bychom potřebovali určovat navíc úhel dopadu α.

Index lomu látek je závislý na vlnové délce světla. Tomuto jevu se říká disperze a je způsobená závislostí rychlosti šíření monochromatické elektromagnetické vlny v látce na její frekvenci. Disperze je příčinou existence tzv. rozkladu světla hranolem, o kterém se můžeme přesvědčit osvětlíme-li hranol paprskem bílého světla, nebo světlem z výbojky. Pozorujeme, že největší deviaci mají paprsky s barvou fialovou a nejmenší s barvou červenou. Tedy s rostoucí vlnovou délkou deviace klesá, a protože podle (9.10) nebo (9.6) většímu indexu lomu odpovídá větší deviace, klesá index lomu s rostoucí vlnovou délkou. Tato závislost se nazývá normální disperze látky a její znalost je významná z hlediska použití dané látky pro optické účely. Naším úkolem bude zjistit tuto závislost pro sklo, ze kterého je vyroben hranol, tj. určit disperzní křivku hranolu. Teoreticky disperzi můžeme popsat pomocí Cauchyho vztahu:

$$n(\lambda) = A + \frac{B}{\lambda^2} + \frac{C}{\lambda^4}. \tag{9.11}$$

V aplikacích je třeba přihlížet k celé řadě fyzikálních parametrů skel optických elementů (např. čoček nebo hranolů) charakterizujících jejich optické a mechanické vlastnosti. Dvěma hlavními optickými parametry uváděnými v technických specifikacích komerčně dostupných skel jsou index lomu skla n_d pro žlutou čáru d z Fraunhoferových čar a Abbeovo číslo [3] (viz obr. 9.3). Žlutá čára d o vlnové délce $\lambda_\mathrm{d} = 587,6\,\mathrm{nm}$ je zvolena proto, že se nachází přibližně uprostřed intervalu vlnových délek viditelného spektra (tj. 380 nm až 750 nm). Abbeovo číslo, které je převrácenou hodnotou disperzní mohutnosti skla [3], je definované jako

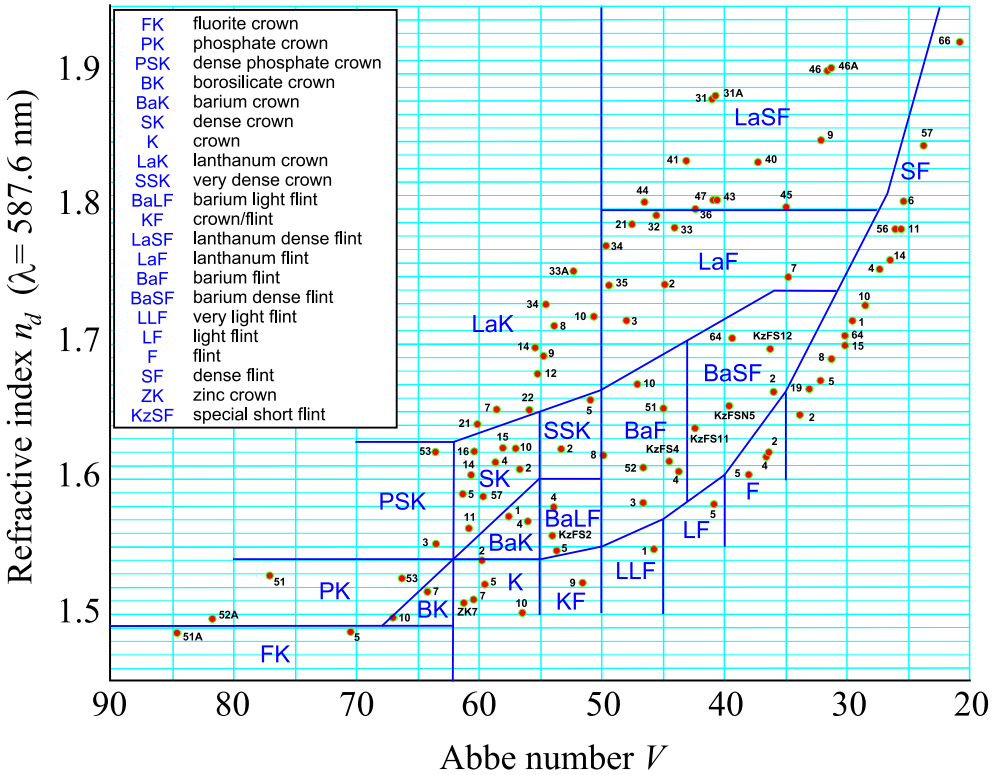
$$\nu_\mathrm{d} = \frac{n_\mathrm{d} - 1}{n_\mathrm{F} - n_\mathrm{C}}, \tag{9.12}$$

kde n_F a n_C jsou indexy lomu skla pro Fraunhoferovy čáry o vlnových délkách $\lambda_F = 486,1\,\mathrm{nm}$ (modrá) resp. $\lambda_C = 656,3\,\mathrm{nm}$ (červená). Abbeovo číslo je nepřímo úměrné rozdílu indexů lomů světla na opačných stranách viditelného spektra. Tedy, čím je Abbeovo číslo skla menší, tím více se mění index lomu s vlnovou délkou světla, a tím bude také větší chromatická vada čočky z daného skla vyrobené.

Experiment

Pomocí goniometru změříme potřebné úhly: lámavý úhel ω hranolu a úhel δ_m minimální deviace paprsků. Zdrojem světla bude rtuťová výbojka, která ve viditelné oblasti spektra obsahuje řadu čar o známých vlnových délkách uvedených v tabulce 9.1. Polohu paprsku budeme určovat vizuálně pomocí nitkového kříže umístěného v ohniskové rovině okuláru dalekohledu, do kterého zobrazíme vstupní štěrbinu kolimátoru osvětlenou výbojkou při měření úhlu minimální deviace.

Vlastní měření se provádí na goniometru SG-5, který má pevné rameno s kolimátorem a otočný stolek s měřeným hranolem. Polohu stolku a dalekohledu lze velmi přesně nastavit hrubým a jemným posuvem a číst ji s přesností jednotek úhlových vteřin. Způsob manipulace a odečítání úhlů na stupnici je popsáno v návodu na obsluhu tohoto goniometru. Před měřením je třeba provést justování hranolu, které spočívá v nastavení lámavých ploch kolmo na optickou osu dalekohledu.



Obrázek 9.3: Abbeův diagram zobrazující Abbeovo číslo (zde V) oproti indexu lomu žluté spektrální čáry n_d pro sérii různých typů skel (číslované tečky). Skla jsou klasifikována podle Schottova kódu, který odráží jejich složení (písmenná část kódu) a polohu v diagramu (číselná část kódu). Zdroj [4].

Provádí se nakláněním stolečku regulačními šrouby. Kolmost se kontroluje autokolimační metodou: nitkový kříž osvětlený žárovkou v okuláru se po odrazu od justované lámavé plochy hranolu zobrazí zpět do ohniskové roviny okuláru dalekohledu. Při ztotožnění nitkového kříže se svým obrazem je lámavá plocha kolmá k optické ose dalekohledu. Postup opakujeme několikrát.

Měření lámavého úhlu ω hranolu provádíme tak, že změříme úhel, který spolu svírají paprsky kolmé k lámavým plochám. Je-li úhel mezi kolmicemi $\psi_1 - \psi_2$, je lámavý úhel

$$\omega = 180 - (\psi_1 - \psi_2). \tag{9.13}$$

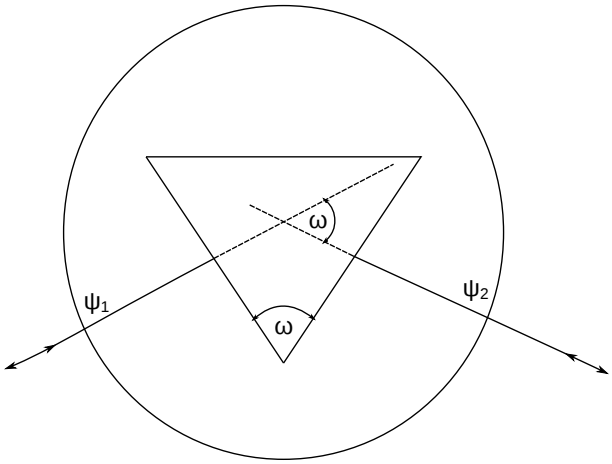
Úhlové polohy dalekohledu ψ_1 a ψ_2, kdy je optická osa dalekohledu kolmá na první resp. druhou lámavou plochu hranolu, nastavíme užitím autokolimační metody. Úhly ψ_1 a ψ_2 pak odečítáme na stupnici spojené s jednou z os rotace stolečku pozorované přes mikroskop umístěný na spodní části dalekohledu. Při měření otáčíme dalekohledem z polohy ψ_1 do polohy ψ_2, aniž bychom otáčeli stolečkem s hranolem (viz obr. 9.5). Pro zvýšení přesnosti určení ω a určení nejistoty provádíme měření několika dvojic úhlů ψ_1, ψ_2.

Měření úhlu minimální deviace δ_m provádíme pro každou spektrální čáru rtuti v bodě obratu paprsku. Minimální deviaci najdeme tak, že měníme úhel dopadu světla z výbojky na hranol otá-

Obrázek 9.4: Upravená fotografie spektra rtuťové výbojky. Očíslovány jsou čáry, jejichž vlnové délky jsou uvedeny v tabulce 9.1.

Tabulka 9.1: Vlnové délky vybraných čar spektra rtuťové výbojky.

Vlnová délka (nm)	barva	poznámka	označení v obrázku 9.4
404,7	fialová	silnější	1
407,8	fialová	slabší	2
435,8	modrá	silná	3
491,6	modrozelená	jasná	4
546,1	zelená	silná	5
576,9	žlutá	silná	6
579,1	žlutá	silná	7
585,9	oranžová	slabá	
607,3	červená	slabá	
623,4	červená	silná	8
690,7	červená	slabá	



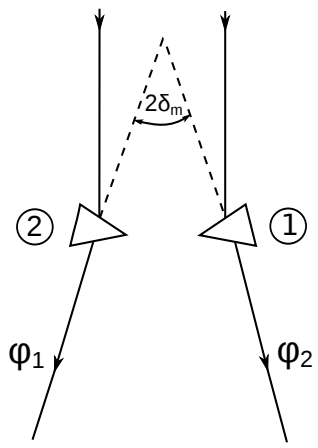
Obrázek 9.5: Měření lámavého úhlu hranolu.

čením stolečku s hranolem a pozorujeme pohyb dané spektrální čáry. Zatímco stolečkem otáčíme stále v určitém zvoleném směru, směr pohybu spektrální čáry vystupující z hranolu se v bodě minimální deviace obrátí (tj. deviace se nejdříve zmenšuje a pak zvětšuje). Bod obratu pohybu spektrální čáry nejlépe přibližně nalezneme prostým okem a až poté zpřesníme určení jeho polohy při pozorování dalekohledem. Nicméně, nemůžeme změřit úhlovou polohu paprsku vstupujícího do hranolu (museli bychom sejmout hranol), a tedy nelze určit minimální deviaci z rozdílu úhlu mezi vstupujícím a vystupujícím paprskem. Proto postupujeme tak, že změříme úhlovou polohu ϕ_1 vystupujícího paprsku v bodě minimální deviace při jeho vstupu do hranolu první lámavou plochou, pak otočíme stolek s hranolem tak, aby paprsek vstupoval do hranolu druhou lámavou plochou a změříme polohu vystupujícího paprsku ϕ_2 v bodě minimální deviace při obráceném směru průchodu paprsku hranolem (viz obr. 9.6). Stolkem s hranolem přitom otáčíme v ose, která není spojená s rotací úhlové stupnice, abychom mohli určit rozdíl úhlů. Rozdíl těchto úhlů je dvojnásobek minimální deviace [1]:

$$\delta_{\mathrm{m}} = (\phi_1 - \phi_2)/2 \tag{9.14}$$

Při měření postupujeme tak, že nejdříve změříme pro všechny zvolené spektrální čáry polohy ϕ_1, pak hranol otočíme a měříme polohy ϕ_2 u stejných spektrálních čar.

Index lomu pro každou spektrální čáru vypočítáme ze vztahu (9.10). Příslušnou vlnovou délku najdeme v tabulce 9.1 nebo přímo v tabulkách [2].



Obrázek 9.6: Měření úhlu minimální deviace z rozdíl úhlů ϕ_1 a ϕ_2, pod kterými pozorujeme paprsky vystupující z hranolu při vstupu přes první resp. druhou lámavou stěnu (poloha hranolu 1 resp. 2).

Úkoly

1. Měřený hranol postavte na stoleček goniometru tak, aby jeho lámavé plochy byly zhruba proti stavěcím šroubům.
2. Proveďte justování hranolu metodou zrcadlení nitkového kříže.
3. Změřte několikrát lámavý úhel hranolu a výsledky statisticky zpracujte.
4. Změřte úhly minimální deviace alespoň pro pět spektrálních čar rtuti v obou polohách hranolu.
5. Vypočítejte index lomu ze vztahu (9.10) pro každou spektrální čáru a pomocí tabulky 9.1 nebo [2] jí přiřaďte vlnovou délku λ.
6. Vyneste do grafu závislost indexu lomu na vlnové délce světla a proložte ji Cauchyho vztahem (9.11) omezeným do kvadratického členu rozvoje

$$n(\lambda) = A + \frac{B}{\lambda^2}.^{1} \tag{9.15}$$

   Hodnoty koeficientů A a B Cauchyho rozvoje explicitně uveďte včetně jednotek a nejistot.
7. Na základě obdrženého Cauchyho vztahu pak určete indexy lomu pro vlnové délky Fraunhoferových čar F, d a C a z nich pak určete Abbeovo číslo skla měřeného hranolu. Výsledky porovnejte s parametry udávanými výrobcem pro měřené sklo.

[1] Z výpočetního hlediska je nejvýhodnější provést proložení po provedení substituce $x = 1/\lambda^2$, čímž se úloha převede na lineární regresi $n = A + Bx$. Pro optické vlnové delky je vhodné používat jako jednotky x [μm^{-2}], neboť pak dostáváme na x-ové ose číselné hodnoty v řádu jednotek až desítek. Vykreslením závislosti indexu lomu n na nově zavedené proměnné x spolu s lineárním fitem pak můžeme rychle ověřit, zda je lineární model vhodný a zda se některé určené hodnoty n výrazně neodchylují od modelové přímky, což by naznačovalo chybu měření nebo ve výpočtu u daného měřícího bodu. Na druhou stranu, výrazná systematická odchylka experimentálně určené závislost $n(x)$ od přímky může naznačovat nutnost fitovat polynomem druhého řádu v x, tedy aplikovat i člen C/λ^4 v Cauchyho vztahu (9.11).

Literatura k úloze 9

[1] A. Kučírková a K. Navrátil: *Fyzikální měření 1*, SPN Praha 1986.

[2] J. Brož, V. Roskovec, M. Valouch: *Fyzikální a matematické tabulky*, str. 137, SNTL Praha 1980.

[3] E. Hecht: *Optics*, Addison Wesley, San Francisco, 2002.

[4] `https://en.wikipedia.org/wiki/Abbe_number`, graf vytvořil Eric Bajart, distribuováno na základě CC-BY 2.0 licence.