Fyzikální praktikum

A. Kučírková, K. Navrátil: Fyzikální měření I, SPN 1989

Kapitola: Zpracování výsledků měření

Ústav fyziky kondenzovaných látek

Přírodovědecká fakulta Masarykovy univerzity

Brno

Z P R A C O V Á N Í   V Ý S L E D K Ů   M Ě Ř E N Í

Samozřejmým cílem každého měření je zjištění správné hodnoty fyzikální veličiny. V této kapitole stručně probereme jaké informace o správné hodnotě dostaneme z výsledku jednoho nebo řady opakovaných měření. Každé jednotlivé měření je zatíženo jednak systematickou chybou, jednak chybou náhodnou. Systematickou chybu způsobenou měřícími přístroji a nevhodným postupem se snažíme v maximální míře potlačit, ale ve většině případů její existenci musíme brát v úvahu. Opakovaná měření ve stejných podmínkách, označíme je x_i ($i=1, 2, 3, \ldots$), se mezi sebou liší. Říkáme tedy, že měření je zatíženo náhodnou chybou. Navíc i sám objekt se může projevovat v náhodných jevech, které se řídí zákony pravděpodobnosti. Informace ze souboru naměřených hodnot získáme vhodným statistickým zpracováním.

Základní pojmy a představy

Soubor nekonečně mnoha hodnot x_i naměřených daným přístrojem, postupem a pozorovatelem se nazývá populace. Tady platí ještě samozřejmý předpoklad, že uvažovaná veličina je během měření konstantní. Průměrná hodnota populace

$$\mu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i, \qquad n \to \infty \tag{1}$$

je pro dané měření konstantní a nazývá se střední hodnota populace. Podobně střední kvadratická odchylka (používá se rovněž označení směrodatná nebo standardní) je určena pro dané měření vztahem

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{(n-1)} \sum_{1}^{n} (x_i - \mu)^2} \qquad . \tag{2}$$

$$n \to \infty$$

Tato veličina je mírou rozptylu hodnot daného měření. Má-li populace normální (Gaussovo) rozdělení, pak do intervalu $\mu \pm k\sigma$ padne přibližně 68.3 % hodnot x_i při $k=1$, 95.5 % hodnot při $k=2$ a 99.7 % při $k=3$.

Připomeneme si vlastnosti Gaussova rozdělení. Spojitá náhodná proměnná, která nabývá libovolných hodnot x s hustotou pravděpodobnosti

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] \tag{3}$$

má normální rozdělení. Pravděpodobnost, že naměříme hodnotu x v intervalu $\langle x_1, x_2\rangle$ je dána výrazem

$$P(x_1, x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\, dx \ . \tag{4}$$

Jinými slovy řečeno, v intervalu $\langle x_1, x_2 \rangle$ bude ležet $P(x_1, x_2).100$ procent celé populace. Například

$$\int_{(\mu-\sigma)}^{(\mu+\sigma)} f(x)\, dx = 0.683 \quad . \tag{5}$$

Výrazy (1) a (2) jsou idealizované, protože ve skutečnosti počet měření n je hodnota vždy konečná. Pro konečnou hodnotu n dostaneme ve výrazu (1) aritmetický průměr x a ve výrazu (2) standardní odchylku jednoho měření s.

Uvažujme nyní velký počet průměrů vypočtených ze sérií o n naměřených hodnotách. Pro střední kvadratickou odchylku z těchto průměrů dostaneme $\sigma/\sqrt{n}$. Průměry jsou méně rozptýlené kolem střední hodnoty. Navíc, rozdělení průměrů n hodnot se blíží s rostoucím n vždy k normálnímu, ať je rozdělení naměřených hodnot jakékoli; je-li rozdělení měřených hodnot normální je rozdělení průměrů normální pro libovolné n. Toto tvrzení je obsahem tzv. centrální limitní věty. Prakticky to znamená, že z velkého počtu průměrů n hodnot, které bychom zjistili při opakování měření by jich padlo 68.3 % do intervalu $\mu \pm \sigma/\sqrt{n}$, 95.5 % do intervalu $\mu \pm 2\sigma/\sqrt{n}$ a 99.7 % do intervalu $\mu \pm 3\sigma/\sqrt{n}$, za předpokladu, že n je velké ($n > 40$). Nebo naměřený průměr $\bar{x}$ má 95.5 procentní pravděpodobnost, že padne do intervalu $\mu \pm 2\sigma/\sqrt{n}$, což je stejné jako tvrzení, že je 95.5 % pravděpodobnost, že bude odchýlen od μ méně než o $2\sigma/\sqrt{n}$. Jinými slovy řečeno, interval

$$\bar{x} \pm \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} \tag{6}$$

má 95.5 % naději, že obsahuje střední hodnotu μ, kterou neznáme. Interval (6) může být jedním z 4.5 procenta intervalů, které střední hodnotu μ neobsahují. Máme riziko 4.5 %, že náš interval nepokrývá neznámou hodnotu. Interval $\bar{x} \pm k\sigma/\sqrt{n}$ se nazývá <u>interval spolehlivosti</u> pro μ a příslušná pravděpodobnost se označuje jako <u>úroveň spolehlivosti</u>. Z předcházejících úvah je zřejmé, že úroveň spolehlivosti zvýšíme jestliže interval spolehlivosti rozšíříme.

Pro lepší porozumění předchozích přechodů od <u>tolerančního intervalu</u> $\mu \pm k\sigma/\sqrt{n}$ k <u>intervalu spolehlivosti</u> $\bar{x} \pm k\sigma/\sqrt{n}$ vypočítáme tyto intervaly pomocí tzv. normovaných odchylek $z_1 = (x_1 - \mu)/\sigma$. Pro normální rozdělení měřených hodnot máme normální rozdělení i pro normované odchylky. Od pravděpodobnosti naměření hodnot v určitém intervalu k pravděpodobnosti zjištění standardních odchylek ležících v určitém intervalu přejdeme záměnou proměnné $z = (x - u)/\sigma$ v integrálu

$$P(x_1) = \int_{-\infty}^{x_1} f(x)\, dx$$

pak

$$P(z_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z_1} \exp(-z^2/2)\, dz \quad . \tag{7}$$

Integrál (7) nám dává v procentech pravděpodobnost 100.P, že naměřená normovaná odchylka z_i (libovolná) bude menší než odchylka z_1.

Další úvahy předvedeme na konkrétním příkladu. Nechť $P(z_1)=0.025$ pro $z_1=-1.96$ a $P(z_2)=0.975$ pro $z_2=1.96$. Platí tedy s pravděpodobností $0.975-0.025=0.95$ (viz obr. 2), že naměřená odchylka padne do intervalu $\langle -1.96,\ 1.96 \rangle$,

$$-1.96 < \frac{x_i-\mu}{\sigma} < 1.96 \qquad (8)$$

odsud dostáváme, že s pravděpodobností P = 95 % platí

$$\mu - 1.96\sigma < x_i < \mu + 1.96\sigma \qquad (9)$$

ale také

$$x_i - 1.96\sigma < \mu < x_i + 1.96\sigma \ . \qquad (10)$$

Ze vztahu (9) vidíme, že s 95 procentní pravděpodobností naměřená hodnota bude ležet v intervalu $\mu \pm 1.96\sigma$, který je vlastně tolerenčním intervalem pro 95% populace naměřených hodnot. Naproti tomu má vztah (10) ten význam, že střední hodnota μ bude ležet uvnitř intervalu $x_i \pm 1.96\sigma$, který je tedy intervalem spolehlivosti pro μ s úrovní spolehlivosti 95 %. Pro určení tolerančního intervalu musíme znát μ a σ, pro určení intervalu spolehlivosti jen σ.

Integrál (4) můžeme psát pro proměnnou $\bar{x}$ (tj. průměry naměřených hodnot) a σ zaměníme na $\sigma/\sqrt{n}$. Dokonce víme, že průměry mají normální rozdělení i když naměřené hodnoty je nemají. Z předchozích úvah dostaneme vztah

$$-1.96 < \frac{\bar{x}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < 1.96 \ . \qquad (11)$$

Tedy interval spolehlivosti

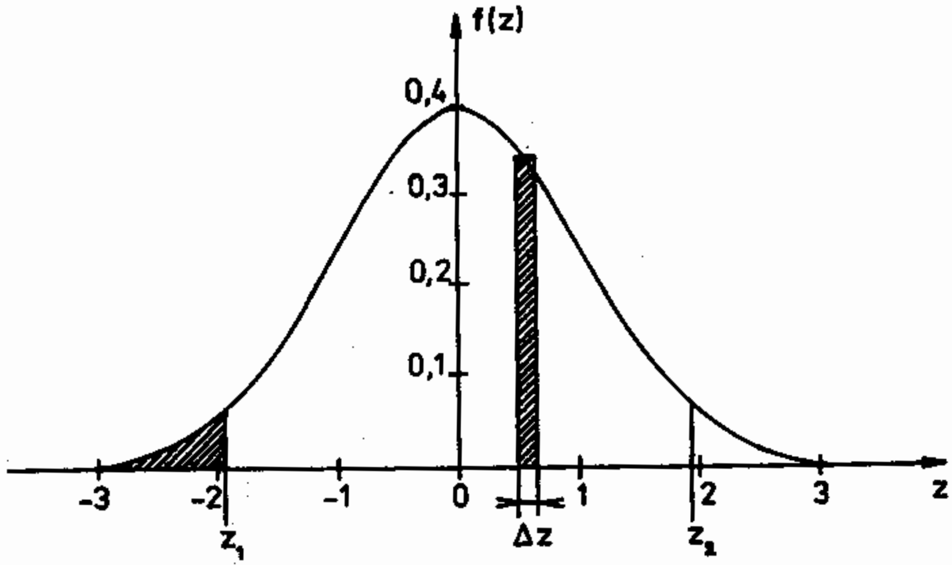
$$\bar{x} \pm 1.96\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \qquad (12)$$

je $\sqrt{n}$ krát užší než interval spohleivosti sestavený z měřené hodnoty x_i pro stejnou 95-ti procentní úroveň spolehlivosti.

V praxi obvykle měříme malý počet hodnot. Standardní odchylka s vypočtená z nich podle vztahu (2) se může lišit od střední kvadratické odchylky populace, kterou neznáme. Sestrojíme-li tedy interval hodnot z veličin, které z měření dostaneme

$$\bar{x} \pm t\,\frac{s}{\sqrt{n}} \qquad (13)$$

vznikne otázka jakou úroveň spolehlivosti můžeme tomuto intervalu přiřadit. Problém se řeší použitím Studentova rozdělení (viz poznámka). Úroveň spolehlivosti intervalu (13) závisí nejen na volbě t, ale také na počtu měření n. Například pro n=5 je úroveň spolehlivosti 62.6 % pro t=1 a 88.4 % pro t=2; tedy podstatně nižší než při velkém počtu měření. Obyčejně řešíme problém zadá-



Obr. 2. Rozdělení normovaných odchylek $z = (x - \mu)/\sigma$. Pořadnice $f(z)$ je určena tak, aby plocha obdélníka $f(z)\,dz$ byla rovna pravděpodobnosti ΔP, že odchylka z padne do příslušného intervalu Δz. Pravděpodobnost, že odchylka z je menší než hodnota z_1 je rovna vyšrafované ploše.

ním úrovně spolehlivosti P, počet měření n je znám a chceme znát hodnotu tzv. Studentova koeficientu $t_{P,n}$ k určení intervalu spolehlivosti.

Poznámka: Studentovo rozdělení říká, že náhodná veličina

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{\nu}}}$$

nabývá reálných hodnot s hustotou pravděpodobnosti

$$f(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\nu\pi}\;\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \left(1 + \frac{t^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}} \qquad (14)$$

kde ν je počet stupňů volnosti. Počet měření n a počet stupňů volnosti ν jsou vázány vztahem

$$n = \nu + 1 \qquad (15)$$

Pro $n > 30$ Studentovo rozdělení přechází v rozdělení Gaussovo.

Zpracování výsledků opakovaných přímých měření

Vypočítáme aritmetický průměr $\bar{x}$ z naměřených hodnot x_i ($i = 1, 2, 3, \ldots, n$, kde n je počet měření)

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \qquad (16)$$

Směrodatnou odchylku jednotlivého měření najdeme pomocí vztahu

$$s\ (x) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}} \tag{17}$$

a směrodatnou odchylku aritmetického průměru podle vztahu

$$s\ (\bar{x}) = \frac{s\ (x)}{\sqrt{n}} \quad . \tag{18}$$

Pro zvolenou úroveň spolehlivosti P určíme z tabulky Studentův koeficient $t_{P,n}$ a vypočítáme náhodnou krajní chybu aritmetického průměru

$$k\ (\bar{x}) = t_{P,n} \frac{s\ (x)}{\sqrt{n}} \quad . \tag{19}$$

Je-li měření zatíženo systematickou chybou $m(x)$ pak výsledek měření bude

$$\bar{x} \pm q$$

kde

$$q = k\ (\bar{x}) + m\ (x)\ . \tag{20}$$

Závěrem vždy uvedeme, jak byl výsledek (20) získán; chyba q je součtem náhodné chyby $k\ (\bar{x})$ s úrovní spolehlivosti P a systematické chyby $m(x)$.

V literatuře se často můžeme setkat s výpočtem celkové chyby jako kvadratického součtu náhodné a systematické chyby

$$q = \sqrt{k^2\ (\bar{x}) + m^2(x)} \quad . \tag{21}$$

I v tomto případě musí být způsob získání celkové krajní chyby popsán.

<u>Zpracování výsledků nepřímých měření</u>

Nechť $y = f(x_1, x_2, \dots , x_h)$, kde $x_1, x_2, \dots, x_h$ jsou přímo měřené veličiny. Aritmetický průměr y dostaneme, dosadíme-li do funkce aritmetické průměry přímo měřených veličin

$$\bar{y} = f\ (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_h) \quad . \tag{22}$$

Standardní odchylku pro y vyčíslíme obecně ze zákona šíření chyb

$$p\ (\bar{y}) = \sqrt{\left(\frac{\delta f}{\delta x_1}\right)^2_{x_1} s^2(\bar{x}_1) + \left(\frac{\delta f}{\delta x_2}\right)^2_{\bar{x}_2} s^2(\bar{x}_2) + \dots} \tag{23}$$

Pro lineární funkce vztahy (22) a (23) platí přesně, pro nelineární jen přibližně; čím zakřivenější je průběh funkce f v intervalu naměřených hodnot, tím je aproximace horší. Vztah (23) nemůžeme použít, je-li derivace funkce v odpovídajícím bodě rovna nule.

Do rovnice (23) dosadíme standardní odchylky průměrů podle vztahu (18). Dostaneme vyjádření $p(\bar{y})$ přes standardní odchylky jednotlivých měření $s(x_i)$, přičemž počet měření každé přímo naměřené veličiny bude různý, tj. x_1 bylo měřeno n_1 krát, x_2 bylo měřeno n_2 krát atd., tedy

$$p(\bar{y}) = \sqrt{\frac{1}{n_1}\left(\frac{\delta f}{\delta x_1}\right)^2_{\bar{x}_1} s^2(x_1) + \frac{1}{n_2}\left(\frac{\delta f}{\delta x_2}\right)^2_{\bar{x}_2} s^2(x_2) + \dots} \tag{24}$$

Interval spolehlivosti pro střední hodnotu populace y bude

$$\bar{y} \pm t_{P,\nu}\ p(\bar{y}) \tag{25}$$

kde $t_{P,\nu}$ je Studentův koeficient pro efektivní počet stupňů volnosti

$$\nu = \frac{\left[\left(\frac{\delta f}{\delta x_1}\right)_{\bar{x}_1} s^2(x_1) + \left(\frac{\delta f}{\delta x_2}\right)_{\bar{x}_2} s^2(x_2) + \dots + \left(\frac{\delta f}{\delta x_h}\right)_{\bar{x}_h} s^2(x_h)\right]^2}{\left(\frac{\delta f}{\delta x_1}\right)^2_{\bar{x}_1} \frac{s^4(x_1)}{n_1-1} + \left(\frac{\delta f}{\delta x_2}\right)^2_{\bar{x}_2} \frac{s^4(x_2)}{n_2-1} + \dots + \left(\frac{\delta f}{\delta x_h}\right)^2_{\bar{x}_h} \frac{s^4(x_h)}{n_h-1}} . \tag{26}$$

Efektivní stupeň volnosti nemusí být celé číslo, pak příslušný koeficient najdeme z tabulky lineární interpolací. Obdobně dostaneme systematickou chybu nepřímého měření $m(y)$ pomocí systematických chyb jednotlivých měření $m(x_i)$,

$$m(y) = \sqrt{\left(\frac{\delta f}{\delta x_1}\right)^2_{x_1} m^2(x_1) + \left(\frac{\delta f}{\delta x_2}\right)^2 m^2(x_2) + \dots + \left(\frac{\delta f}{\delta x_h}\right)^2 m^2(x_h)} \tag{27}$$

Celkový výsledek bude

$$\bar{y} \pm \left[t_{P,\nu}\ p(\bar{y}) + m(y)\right] \tag{28}$$

nebo

$$\bar{y} \pm \sqrt{(t_{P,\nu})^2 + m^2(y)} . \tag{29}$$

Tady platí stejná zásada jako u přímých měření, že výsledek musí být doprovázen vysvětlením o způsobu jeho získání. Chyby uvádíme na jedno (nejvýše dvě) platná místa a aritmetický průměr jen na tolik míst, aby chyba zasahovala právě na poslední místo.

Rychlý výpočet intervalů spolehlivosti pro μ

Při malém počtu naměřených hodnot můžeme střední kvadratickou odchylku odhadnout pomocí rozdílu r největší a nejmenší naměřené hodnoty a to tak, že tento rozdíl vynásobíme koeficientem z následující tabulky

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
k_1	0.886	0.591	0.486	0.430	0.395	0.370	0.351	0.337	0.325

Pak pro s dostáváme

$$s = k_1 r$$

což přibližně souhlasí s hodnotou s vypočítanou podle vztahu (17).

Pomocí r můžeme také stanovit interval spolehlivosti pro μ, např. pro 95-ti procentní spolehlivost, prostřednictvím této tabulky

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
k_2	7.9	1.47	0.77	0.53	0.41	0.34	0.29	0.26	0.23

Potom

$$\bar{x} \pm k_2 r \quad .$$

Při malém počtu měření ($n \leqslant 10$) dávají tyto postupy užívající veličinu r prakticky stejně dobré odhady jako postupy užívající parametr s .

Statistické testování pomocí intervalů spolehlivosti

Nejčastější úlohou týkající se výsledku zpracování naměřených hodnot je posouzení, zda výsledek souhlasí s určitou standardní hodnotou nebo jinak změřenou hodnotou. Nechť např. je x_0 tabelovaná hodnoty některé fyzikální veličiny. Souhlasí náš výsledek s předepsanou hodnotou? Naměřená hodnota $\bar{x}$ je jednou hodnotou populace průměrů, která má střední hodnotu μ (rovnou střední hodnotě populace měřených hodnot). Je-li $\mu = x_0$ jedná se o souhlas , je-li $\mu \neq x_0$ jedná se o nesouhlas. Na otázku,která z těchto možností nastala, nemůžeme odpovědět jednoznačně, můžeme jen říci, která je pravděpodobnější. Vypočítáme interval spolehlivosti pro střední hodnotu μ s P procentní úrovní spolehlivosti

$$\bar{x} \pm t_{P,n} \frac{s}{\sqrt{n}} \quad .$$

Nechť tabelovaná hodnota x_0 v tomto intervalu neleží. Kdyby platilo $x_0 = \mu$, potom by byla P procentní pravděpodobnost, že vypočtený interval hodnotu x_0 pokryje a α procentní ($\alpha = 1 - P$) pravděpodobnost, že ji nepokryje. Protože vypočítaný interval nepokrývá x_0 , je možné, že nastal právě jeden případ z uvedených α procent, avšak pravděpodobnější je, že neplatí $x_0 = \mu$, nýbrž platí $x_0 \neq \mu$. Proto v případě, kdy nepokrývá P procentní interval spolehlivosti pro μ zadanou hodnotu x_0 tvrdíme, že je $x_0 \neq \mu$, avšak pamatujeme na α procentní riziko, že ve skutečnosti může platit $x_0 = \mu$. Hodnotu α nazýváme hladinou významnosti testu. Nechceme-li se vzdát tvrzení, že $x_0 = \mu$ (tzv. nulová hypotéza), pak volíme hladinu významnosti α menší.

Pokrývá-li interval spolehlivosti hodnotu x_0, netvrdíme, že $x_0 = \mu$, pouze tuto možnost nezamítáme. Šířka intervalu závisí na s , výběru α a počtu měření n . Šířka intervalu zhruba indikuje, jak se může různit μ od x_0, když x_0 leží uvnitř vypočítaného intervalu spolehlivosti. Takže na jedné straně nezamítáme tvrzení $x_0 = \mu$, na druhé straně šířka intervalu ukazuje jak se může lišit μ od x_0 , tj. vlastně $x_0 \neq \mu$. Tato možnost má pravděpodobnost β . Závislost $\beta = \beta(\mu - x_0)$ při daném n a α se nazývá <u>operační charakteristika</u> testu, která udává pravděpodobnost β, že nezamítneme nulovou hypotézu $\mu = x_0$, když je ve skutečnosti μ rozdílné od x_0. Operační charakteristiky jsou uvedeny v tabulkách [2]. Při nevelkém počtu měření n , kdy operační charakteristika klesá s rozdílem $\mu - x_0$ pozvolně, je velká pravděpodobnost β , že výsledkem testu bude nezamítnutí nulové hypotézy $\mu = x_0$ i když ve skutečnosti je μ značně rozdílné od x_0.

Závěrem můžeme říci, že když P procentní interval spolehlivosti pro μ

a) pokrývá zadanou hodnotu x_0, naměřené hodnoty nesvědčí proti předpokladu $\mu = x_0$, avšak μ se může od x_0 různit uvnitř intervalu s nemalou pravděpodobností. Pro odchylky $\mu - x_0$ větší než je šířka intervalu je malá pravděpodobnost.

b) nepokrývá zadanou hodnotu x_0 , naměřené hodnoty silně svědčí proti předpokladu $\mu = x_0$; je jen α procentní pravděpodobnost, že platí $\mu = x_0$ ($\alpha = 1 - P$).

Literatura :

[1] V. Mitvalský, Zpracování naměřených hodnot, VUT Brno (1978).
[2] J. Likeš, I. Laga, Základní statistické tabulky, SNTL Praha (1978)
D. R. Owen, Handbook of Statistical Tables, Addison Wesley Reading Palo Alto (1962).

<u>Studentovo rozdělení</u>

V tabulce jsou hodnoty koeficientů $t_{P,n}$ v závislosti na počtu stupňů volnosti ν a pravděpodobnosti P .

Počet měření $n = \nu + 1$

ν \ P	0.5	0.683	0.9	0.95	0.98	0.99
1	1.000	1.839	6.314	12.706	31.820	63.660
2	0.816	1.322	2.920	4.303	6.965	9.925
3	0.765	1.198	2.353	3.182	4.541	5.841
4	0.741	1.142	2.132	2.776	3.747	4.604
5	0.727	1.111	2.015	2.571	3.365	4.032
6	0.718	1.091	1.943	2.447	3.143	3.707
7	0.711	1.077	1.845	2.370	2.998	3.499
8	0.706	1.067	1.860	2.306	2.896	3.355
9	0.703	1.059	1.833	2.267	2.821	3.250
10	0.700	1.053	1.812	2.228	2.764	3.169
11	0.697	1.048	1.796	2.211	2.718	3.106
12	0.695	1.044	1.782	2.191	2.681	3.055
13	0.694	1.041	1.771	2.174	2.650	3.012
14	0.692	1.038	1.761	2.160	2.624	2.977
15	0.691	1.035	1.753	2.131	2.602	2.947
20	0.687	1.026	1.725	2.086	2.539	2.845
30	0.683	1.018	1.697	2.065	2.457	2.750

ν \ P	0.5	0.683	0.9	0.95	0.98	0.99
40	0.681	1.013	1.684	2.054	2.423	2.704
50	0.679	1.011	1.676	2.042	2.403	2.678
∞	0.675	1.000	1.645	1.960	2.326	2.576