MASARYKOVA UNIVERZITA V BRNĚ
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
KATEDRA OBECNÉ FYZIKY

DIPLOMOVÁ PRÁCE

AKUSTIKA PRO STUDENTY STŘEDNÍCH ŠKOL

Vedoucí diplomové práce: RNDr. Zdeněk Bochníček, Dr.

BRNO 2002 Magdalena Čermáková

Tato diplomová práce je zpracována jako doplňkový učební text pro studenty středních škol. Obsahuje podrobné vysvětlení základních pojmů používaných v akustice a souvislostí mezi nimi. Protože však akustika má široké uplatnění v hudební praxi, je hlavní část práce věnována jednak souvislostem mezi fyzikální a hudební teorií a převážně pak fyzikálním principům vzniku zvuku u jednotlivých hudebních nástrojů.

Na tomto místě bych ráda poděkovala RNDr. Zdeňkovi Bochníčkovi za jeho rady a vedení diplomové práce. Dále chci poděkovat svým přátelům Aničce Krúpové, Ondrovi Přibylovi, Petrovi Velanovi a Honzovi Adámkovi za laskavé zapůjčení jejich hudebních nástrojů a Martinu Čermákovi za pomoc při nahrávání nástrojů a vytváření Fourierovy analýzy. Také děkuji Tomáši Tycovi za jeho cenné rady a pomoc při fotografovaní Chladniho obrazců.

Prohlašuji, že jsem na celé diplomové práci pracovala samostatně a užila jsem jen informací z citovaných zdrojů.

Obsah

1. **Úvod**……11

2. Úvod do hudební akustiky……12

2.1. Základní pojmy z akustiky……...12

2.2. Výška tónu……...14

2.3. Tónový rozsah užívaný v hudbě……..15

2.4. Intenzita zvuku……17

2.5. Akustický tlak……..18

2.6. Hladina intenzity……..20

2.7. Barva tónu……22

2.8. Principy stavby tónových soustav……22

2.9. Pythagorejské ladění……23

2.10. Přirozené ladění……26

2.11. Zvyšovaní a snižování tónů……..29

2.12. Temperované ladění……31

2.13. Mezinárodní a fyzikální ladění……33

3. Akustika hudebních nástrojů……...34

3.1 . Chordofony……..34

3.1.1. Rozdělení a konstrukce chordofonů……34

3.1.2. Kmity struny……35

3.1.3. Tvoření tónů na strunných nástrojích……...39

3.1.4. Drnkací nástroje……...41

3.1.5. Kladívkové nástroje……46

3.1.6. Smyčcové nástroje……...48

3.2. Idiofony……53

3.2.1. Rozdělení idiofonů……...53

3.2.2. Kmity tyče……...53

3.2.3. Tvoření tónů na tyči a rozložení uzlových bodů při určitém upevnění tyče……...56

3.2.4. Hudební nástroje založené na kmitech tyčí……..61

3.2.5. Kmity desek…….62
3.2.6. Tvoření tónů na deskách a rozložení uzlových čar……..63
3.2.7. Hudební nástroje založené na kmitech tyčí……..67
3.3. Membránofony…….69
3.3.1. Kmity membrán……...69
3.3.2. Hudební nástroje založené na kmitech membrán…….70
3.4. Aerofony……..72
3.4.1. Rozdělení a konstrukce aerofonů……72
3.4.2. Kmity vzdušného sloupce……73
3.4.3. Tvoření tónů u aerofonů……...77
3.4.4. Nástroje založené na principu retné píšťaly……78
3.4.5. Jazýčkové hudební nástroje……..81
3.4.6. Jednoplátkové hudební nástroje……...82
3.4.7. Dvojplátkové hudební nástroje……83
3.4.8. Plechové hudební nástroje……85
3.4.9. Hudební nástroje s kovovými jazýčky…….87

Literatura…….90

1. Úvod

Tato diplomová práce je zpracována jako doplňkový učební text pro studenty středních škol. Tématicky navazuje na učivo o kmitání a vlnění. V dnešních středoškolských osnovách a učebnicích se akustice věnuje jen velmi málo pozornosti, zpravidla se rozsah látky omezuje pouze na výklad základních akustických pojmů jako je zvuk, tón, výška, intenzita apod. Cílem této práce je rozšířit a doplnit poznatky o akustice, které studenti získají na střední škole. Protože akustika má široké uplatnění v hudební praxi, je hlavní část práce věnována souvislostem mezi fyzikální a hudební teorií a převážně pak fyzikálním principům vzniku zvuku u jednotlivých hudebních nástrojů.

Práce je rozdělena do dvou částí. První část (kapitola 2) se věnuje jednak podrobnému vysvětlení základních pojmů používaných v akustice a souvislostí mezi nimi a jednak popisu různých typů tónových soustav a ladění.

V druhé, hlavní části práce (kapitola 3) jsou popsány fyzikální principy vzniku zvuku u jednotlivých typů hudebních nástrojů. Tato kapitola se dělí na čtyři podkapitoly podle čtyř hlavních principů vzniku zvuku, a to kmitání struny, chvění desek a tyčí, kmitání membrán a vzduchového sloupce. Na začátku každé kapitoly je nejprve podrobný fyzikální popis daného principu, na který navazuje popis jednotlivých hudebních nástrojů, které na tomto principu fungují.

2. Úvod do hudební akustiky

2.1. Základní pojmy z akustiky

Akustika (z řec. *akustikos* = vztahující se k slyšení) je obor fyziky, který se zabývá zkoumáním zvuků. Zvukem označujeme každé mechanické vlnění, které může zaznamenat lidský sluch, tedy mechanické vlnění v rozmezí frekvencí 16 Hz – 16 kHz s dostatečně velkou intenzitou. Zvuky slyšíme proto, že ucho zaznamenává tlakové změny prostředí, kterým se vlnivý rozruch od zdroje zvuku šíří. Zvuky vyvolané neperiodickými tlakovými změnami prostředí označujeme jako nehudební zvuky a jsou to např. výstřel, skřípání, vrzání apod. Zvuky vyvolané periodickými tlakovými změnami prostředí nazýváme hudební zvuky neboli tóny. Tóny dále rozdělujeme na jednoduché a složené. Jednoduchý tón je takový tón, jehož časový průběh lze vyjádřit pomocí jediné harmonické funkce sinus nebo kosinus (s libovolnou frekvencí, amplitudou a fázovým posuvem). Má-li tón složitější průběh, ale funkce je přitom stále periodická, jde o tón složený. Každý takový tón však lze (pomocí Fourierovy analýzy) rozložit na větší počet jednoduchých tónů, jejichž časové průběhy mohou mít vůči sobě různé amplitudy, různé frekvence a různé fázové posuvy. Jednoduché tóny obsažené ve složeném tónu označujeme jako částkové tóny, v některých případech také jako vyšší harmonické tóny. Částkový tón, který má nejmenší frekvenci, označujeme jako základní tón složeného tónu.

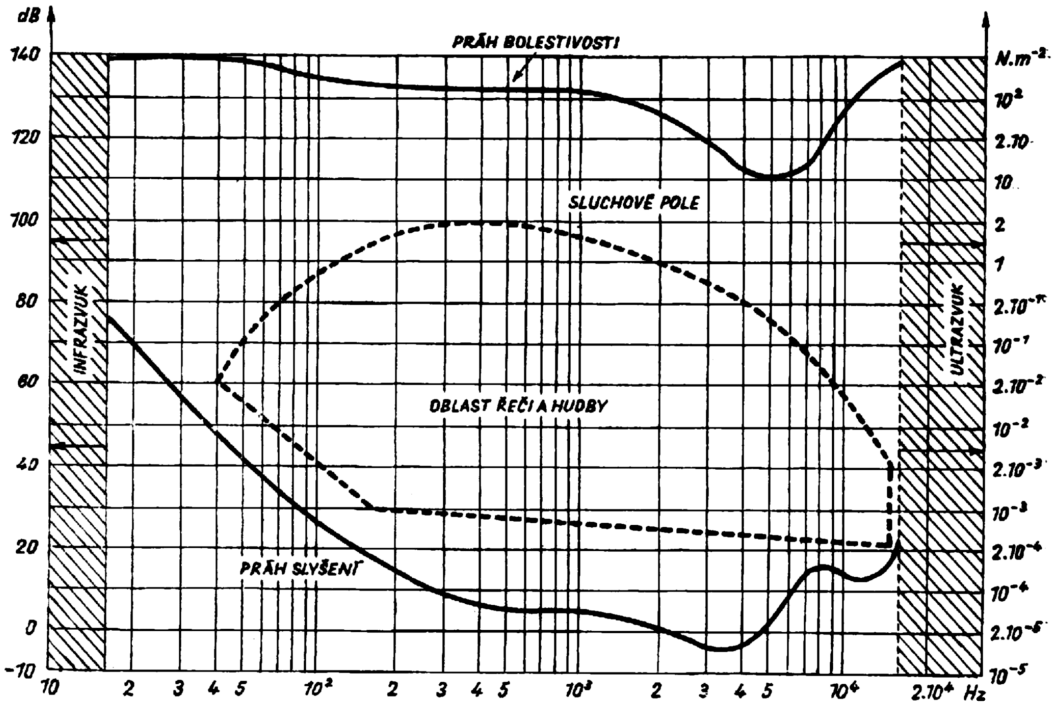
Zvuk sestávající z velkého počtu různých tónů, které mají navzájem velmi blízké frekvence, nazýváme šum. Je-li intenzita všech těchto složek šumu v slyšitelné oblasti stejná a jsou-li zastoupeny rovnoměrně všechny frekvence, označujeme takový zvuk pojmem bílý šum. Zvuk, který obsahuje periodické i neperiodické složky, nazýváme hluk.

Každý tón má čtyři charakteristické vlastnosti: výšku, hlasitost, barvu a časovou délku (trvání). Trváním tónu se zabývá metrika, ale první tři vlastnosti patří do oblasti akustiky.

Jak už bylo řečeno, podmínkou slyšitelnosti zvuku je, aby se jeho frekvence pohybovala v rozmezí 16 Hz až 16 kHz. Frekvenci 16 Hz označujeme pojmem dolní sluchová mez, frekvenci 16 kHz pak pojmem horní zvuková mez. Akustické rozruchy

s frekvencemi pod dolní sluchovou mezí patří do oblasti infrazvuku. (jsou to např. periodické záchvěvy půdy při zemětřesení). Akustické kmity s vyšší frekvencí než horní sluchová mez nazýváme ultrazvuk. Kmity s frekvencí vyšší než 1 MHz řadíme do oblasti hyperzvuku.Ve slyšitelném zvuku mohou být často obsaženy složky z oblasti infrazvuku nebo ultrazvuku, i když je nevnímáme. V malých intenzitách je infrazvuk i ultrazvuk neškodný, při větší intenzitě však mohou být pro lidský organismus nebezpečné.

Abychom mohli vnímat zvuky ve slyšitelné oblasti, musí mít dostatečně velkou intenzitu. Intenzita zvuku souvisí s tzv. akustickým tlakem. Nejnižší možnou hodnotu akustického tlaku, při kterém ještě zvuk můžeme slyšet, označujeme jako práh slyšení. Při nižším akustickém tlaku již lidské ucho zvuk neslyší. Jestliže se hodnota akustické tlaku a tím i intenzity zvuku bude stupňovat, při určité hodnotě vznikne v uchu bolestivý pocit. Tuto hodnotu akustického tlaku nazýváme práh bolestivosti. Množina všech frekvencí a intenzit, ohraničených dolní a horní mezí - prahem slyšení a prahem bolestivosti - tvoří tzv. sluchové pole. Poměrně malá část tohoto sluchového pole obsahuje frekvence a intenzity běžné v lidské řeči a hudbě.



Obr.1 Sluchové pole (převzato z [4])

2.2. Výška tónu

Protože lidský sluch vnímá tóny o větší frekvenci jako „vyšší“ a tóny o menší frekvenci jako „hlubší“, budeme výšku tónu udávat právě pomocí jeho frekvence. Budeme rozlišovat dva pojmy, a to absolutní a relativní výšku tónu. Absolutní výšku tónu definujeme jako frekvenci tohoto tónu f. Jednotkou frekvence je 1 Hertz (Hz). Znějí-li dva tóny a jeden z nich má absolutní výšku f a druhý $2f$, tvoří druhý (vyšší) tón tzv. oktávu prvního (nižšího) tónu. Je-li tedy poměr absolutních výšek tónů 2, říkáme, že mezi oběma tóny je hudební interval oktávy. Obecně definujeme hudební interval jako poměr $\frac{f_2}{f_1}$, kde f_2 a f_1 jsou absolutní výšky tónů, které interval tvoří. Někdy také poměr $\frac{f_2}{f_1}$ označujeme jako relativní výšku tónu s frekvencí f_2 vzhledem k tónu s frekvencí f_1. Relativní výšky (intervaly) mohou být obecně dány jakýmkoliv reálným číslem. Zpravidla určujeme relativní výšku vyššího tónu vzhledem k nižšímu a tak je velikost intervalu větší nebo rovna číslu 1.

O tónech, jejichž relativní výšky vzhledem k tónu o frekvenci f jsou dány přirozenými čísly 2, 3, 4, 5, ….., k (tedy o takových tónech, jejichž frekvence jsou k-násobky frekvence f), říkáme, že jsou harmonické vzhledem k tónu o frekvenci f, který nazveme základním tónem. Základní tón považujeme za 1. harmonický tón a označujeme ho zpravidla f_1.

Výšku složeného tónu definujeme jako výšku jeho základního tónu, tedy částkového tónu, který má nejmenší frekvenci. Pokud jsou částkové tóny obsažené ve složeném tónu harmonické vzhledem k základnímu tónu, nazýváme je vyšší harmonické tóny. Pro k-tý harmonický tón pak platí vztah

$$f_k = k \cdot f_1 . \tag{1}$$

Pokud částkové tóny nejsou harmonické vzhledem k základnímu tónu, mluvíme pouze o částkových tónech (případně o vyšších částkových tónech).

Na tomto místě se chvíli zastavíme. Dosud definované pojmy – jako zvuk, tón, hluk, složený tón, částkové a vyšší harmonické tóny, to jsou pojmy, které se již v hudební terminologii zažily a běžně se vyskytují v literatuře. Pokud však definice těchto pojmů lépe promyslíme, nacházíme v nich následující rozpor. V definici

složeného tónu říkáme, že jde o tón, jehož časový průběh je složitější než funkce sinus, a přitom je stále periodický. To by však předpokládalo, že je složen pouze z takových tónů, které neporuší jeho periodicitu. Tuto podmínku splňují všechny vyšší harmonické tóny, z kterých se složený tón skládá. Dále však říkáme, že vyšší harmonické tóny jsou speciálním případem tónů částkových. To však znamená, že některé částkové tóny, které nejsou zároveň vyššími harmonickými tóny, nejsou harmonické vzhledem k základnímu tónu. Pokud však složený tón obsahuje částkové tóny, které jsou neharmonické vzhledem k základnímu tónu, naruší se tím jeho periodický průběh . To by ovšem znamenalo, že již nejde o tón, ale o nehudební zvuk. K tomuto rozporu došlo pravděpodobně z následujícího důvodu. Zvuk obecně vzniká kmitáním nějakého systému a tento systém může nabývat různých kmitových módů. Tyto kmitové módy úzce souvisí právě s tím, které částkové tóny se ve výsledném složeném tónu objeví. U většiny kmitajících systémů, které se používají v hudbě, se vybudí takové kmitové módy, že výsledný zvuk je složen pouze z vyšších harmonických tónů. Ale tam, kde vzniká zvuk chvěním tyče, desky nebo membrány, se tvoří takové kmitové módy, že výsledný zvuk je složen z tónů, které jsou neharmonické vzhledem k základnímu tónu. Protože vzbuzený kmitový mód systému popisujeme právě pomocí tónů, z kterých se výsledný zvuk skládá, bylo v případě kmitů tyčí, desek a membrán nutné rozšířit pojem vyšší harmonické tóny na pojem tóny částkové, přestože již pak nepopisujeme hudební zvuk, nýbrž hluk. Přesto chvění tyčí, desek a membrán můžeme v hudbě použít, poněvadž tyto systémy lze nastavit tak, aby vzbuzené vyšší částkové tóny měly malou intenzitu v porovnání se základním tónem, a proto jsme schopni výsledný zvuk vnímat jako tón a nikoliv jako hluk.

2.3. Tónový rozsah užívaný v hudbě

V praktické hudbě se běžně používají tóny s frekvencemi v rozmezí od 16 Hz do 4 kHz. Nejhlubší tón o frekvenci 16 Hz označíme jako C_2. Tón o oktávu vyšší, který se značí C_1, bude mít dvakrát větší frekvenci než C_2, tedy 32 Hz. Zvedneme-li tón o další oktávu, dostaneme se na tón C, který má dvakrát větší frekvenci než C_1 a zároveň čtyřikrát větší frekvenci než C_2, tedy 64 Hz. Takto bychom mohli pokračovat až k nejvyššímu v hudbě používanému tónu s frekvencí 4000 Hz. Z předchozího postupu je jasné, že chceme-li zjistit frekvenci tónu zvýšeného od původního tónu

o k oktáv, musíme frekvenci původního tónu vynásobit číslem 2^k. Počet tónů v uvedeném rozmezí frekvencí zjistíme následujícím způsobem:

$$\frac{4000}{16} = 250 \doteq 256 = 2^8$$

Z toho plyne, že mezi frekvencemi nejhlubšího a nejvyššího tónu leží přibližně 8 oktáv. Pojem oktáva však neoznačuje pouze interval (relativní výšku) dvou tónů f_1 a f_2, kde $f_2 = 2f_1$, ale tento pojem označuje také základní řadu tónů, jejichž frekvence leží mezi f_1 a f_2 a tvoří stupnici (jednotlivé typy stupnic rozebereme později). Oktáva se skládá z osmi základních tónů, začíná tónem f_1 a končí tónem f_2, který je zároveň počátečním tónem další oktávy. Každá z osmi oktáv má svůj název a podle názvu oktávy pak označujeme i jednotlivé tóny, které do příslušné oktávy patří. Přehled tónů v jednotlivých oktávách ukazuje následující tabulka:

Název oktávy	Jednotlivé tóny oktávy							
Subkontra	C_2	D_2	E_2	F_2	G_2	A_2	H_2	C_1
Kontra	C_1	D_1	E_1	F_1	G_1	A_1	H_1	C
Velká	C	D	E	F	G	A	H	c
Malá	c	d	e	f	g	a	h	c^1
Jednočárkovaná	c^1	d^1	e^1	f^1	g^1	a^1	h^1	c^2
Dvoučárkovaná	c^2	d^2	e^2	f^2	g^2	a^2	h^2	c^3
Tříčárkovaná	c^3	d^3	e^3	f^3	g^3	a^3	h^3	c^4
Čtyřčárkovaná	c^4	d^4	e^4	f^4	g^4	a^4	c^4	c^5

Frekvence tónů v určitém sloupci tabulky je vždy dána násobkem frekvence tónu, který je v prvním řádku tohoto sloupce a pro jakékoliv dva tóny v jednom sloupci platí, že jsou od sebe vzdáleny o několik oktáv. Protože relativní výška dvou tónů, které jsou od sebe vzdáleny o jednu oktávu, je 2, relativní výška dvou tónů, které leží ve stejném řádku tabulky, je vždy menší nebo rovna 2. Stejně, jako má interval mezi prvním a osmým tónem stupnice specifický název oktáva a relativní výšku 2, mají i intervaly mezi prvním a libovolným jiným tónem stupnice svůj název a předepsanou relativní výšku. Podle toho lze pak určit i relativní výšku dvou libovolných tónů stupnice, tedy v jednom řádku tabulky, ale také relativní výšku dvou libovolných tónů z celé tabulky. Relativní výšky jednotlivých intervalů se však liší v různých typech ladění, o kterých

jsme se zatím nezmínili. Proto se k tomuto problému vrátíme později, až budeme něco vědět jednak o jednotlivých typech ladění a také o způsobu, jakým tvoříme různé druhy stupnic.

2.4. Intenzita zvuku

Šíří-li se postupná akustická vlna prostředím, potom celková energie každé částice tohoto prostředí je rovna maximální kinetické energii této částice během jedné periody. Celkovou energii jedné částice označíme W_1 a platí pro ni vztah

$$W_1 = \frac{1}{2} m v_0^2 , \tag{2}$$

kde m je hmotnost částice a v_0 je její maximální rychlost. Celkovou akustickou energii prostředí v určitém vymezeném objemu V, kde kmitá n částic, určíme ze vztahu

$$W = \frac{1}{2} n \cdot m \cdot v_0^2 = \frac{1}{2} M \cdot v_0^2 , \tag{3}$$

kde $M = m \cdot n$ je hmotnost všech částic prostředí v objemu V.

Zvukový (akustický) výkon P definujeme jako množství akustické energie W, které projde určitou normálovou plochou S (tj. plochou kolmou ke směru šíření vlny) za jednu sekundu, a platí pro něj vztah

$$P = \frac{W}{t} , \tag{4}$$

kde W je celková akustická energie, která za čas t prošla plochou S. Jestliže vysílá vlnění bodový zvukový zdroj, rozumíme akustickým výkonem P tohoto zdroje energii, kterou zdroj vysílá do prostoru v každé sekundě, neboli energii, která by prošla kulovou plochou o libovolném poloměru (se středem v uvažovaném zdroji) za jednu sekundu. U postupných vln v prostoru je výhodnější měřit akustický výkon připadající na plošnou jednotku 1 m^2. Tuto veličinu nazýváme intenzita zvuku I, vyjadřuje množství akustické energie, která projde jednotkovou plochou za jednu sekundu, a platí pro ni vztah

$$I = \frac{W}{S \cdot t} . \tag{5}$$

2.5. Akustický tlak

Šíří-li se zvukové vlnění prostředím, mění se periodicky síly, které působí na určitou plochu v prostředí. Mezi akustickou tlakovou sílou F působící na plochu S a akustický tlakem p platí obvyklý vztah

$$p = \frac{F}{S}. \tag{6}$$

Jestliže budeme uvažovat zjednodušený případ, kdy se prostředím šíří sinusová postupná vlna, akustický tlak bude mít v závislosti na čase sinusový průběh

$$p = p_0 \sin \omega t, \tag{7}$$

kde p_0 značí maximální akustický tlak v průběhu periody, ω úhlovou frekvenci ($\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$). Dále zavedeme tzv. efektivní hodnotu tlaku, kterou později použijeme pro výpočet intenzity. Veličina efektivní tlak se zavede analogicky, jako se v obvodu střídavého napětí zavádí efektivní hodnoty proudu a napětí pro výpočet výkonu. Pro efektivní tlak platí vztah

$$p_{ef} = \frac{p_0}{\sqrt{2}} \doteq 0{,}707\, p_0. \tag{8}$$

Tento vztah můžeme odvodíme analogicky jako efektivní hodnoty proudu a napětí.

Nejprve umocníme na druhou rovnici (7) a dostaneme $p^2 = p_0^2 \sin^2 \omega t$. Určíme střední hodnotu kvadrátu tlaku p_{ef}^2 a potom tento výraz odmocníme. Střední hodnotu kvadrátu určíme výpočtem následujícího integrálu:

$$p_{ef}^2 = \frac{1}{T}\int_0^T p_0^2 \sin^2 \omega t dt = \frac{p_0^2}{T}\int_0^T \sin^2 \omega t dt = \frac{p_0^2}{T} \cdot \left[\frac{-\frac{1}{2}\cos \omega t \cdot \sin \omega t + \frac{1}{2}\omega t}{\omega} \right]_0^T =$$

$$= \frac{p_0^2}{T} \cdot \left[\frac{-\frac{1}{2}\cos \frac{2\pi}{T} t \cdot \sin \frac{2\pi}{T} t}{\omega} + \frac{t}{2} \right]_0^T = \frac{p_0^2}{T}\frac{T}{2} = \frac{p_0^2}{2}$$

Po odmocnění předchozího výsledku dostáváme hledaný vztah (8).

Podobně můžeme zavést také efektivní hodnotu pružné síly

$$F_{ef} = \frac{F_0}{\sqrt{2}}, \tag{9}$$

kde F_0 je maximální hodnota velikosti síly v průběhu periody, a také efektivní hodnotu rychlosti

$$v_{ef} = \frac{v_0}{\sqrt{2}}, \tag{10}$$

kde, v_0 je maximální velikost rychlosti.

V dalším budeme předpokládat sinusovou vlnu, která se šíří v rovinných vlnoplochách. Abychom nalezli vztah mezi intenzitou a akustickým tlakem, dosadíme rovnici (3) do vztahu (5) a rozšíříme zlomek na pravé straně hmotností M a dostaneme

$$I = \frac{M^2 v_0^2}{2MSt}. \tag{11}$$

Podle druhého Newtonova zákona platí, že hybnost hmotnosti M při rychlosti v je rovna impulsu síly Ft, tedy $M \cdot v_{ef} = F_{ef} t$. Jmenovatele ve vztahu (11) můžeme přepsat na $2\rho \cdot s \cdot S^2 t$ a dále na $2\rho \cdot c \cdot S^2 t^2$. Dosadíme–li výraz do vztahu (11), dostaneme

$$I = \frac{F_{ef}^2}{S^2 \rho \cdot c}, \tag{12}$$

kde ρ je hustota prostředí a c je rychlost šíření vlnění v tomto prostředí. Při dosazení ze vztahu (6) dostaneme velmi důležitý vztah

$$I = \frac{p_{ef}^2}{c \cdot \rho}, \tag{13}$$

který ukazuje, že akustickou intenzitu I lze měřit pomocí akustického tlaku. V daném izotropním prostředí bude hustota a rychlost šíření konstantní, a proto bude intenzita záviset výhradně na akustickém tlaku bez ohledu na výšku zvuku, protože vztah (13) neobsahuje frekvenci *f*.

Někdy je výhodné vyjádřit intenzitu pomocí efektivní rychlosti. Nejprve tedy dosadíme z rovnice (3) do rovnice (5), maximální rychlost nahradíme efektivní rychlostí podle vztahu (10), hmotnost M nahradíme výrazem $M = V\rho = S \cdot s \cdot \rho = S \cdot c \cdot t \cdot \rho$ a dostaneme vztah

$$I = v_{ef}^2 \cdot c \cdot \rho. \tag{14}$$

K měření akustické intenzity se využívá vztahu (13) nebo (14).

Šíří–li se zvuková vlna z bodového zdroje do okolního prostředí, postupuje v kulových vlnoplochách. Pokud má intenzita ve vzdálenosti R od zdroje hodnotu I, potom ve vzdálenosti $k \cdot R$ bude mít hodnotu $\frac{I}{k^2}$, protože ve vzdálenosti k-krát větší se zvětšila vlnoplocha ze $4\pi R^2$ na $4\pi k^2 R^2$ a proto na plošnou jednotku připadá k^2-krát menší energie. Pro převod kulových akustických vln na rovinné a naopak se používají tzv. akustické čočky.

U složeného tónu se jeho intenzita stanoví pouze přibližně jako součet intenzit jeho jednotlivých částkových tónů:

$$I = I_1 + I_2 + I_3 + \cdots + I_n . \qquad (15)$$

Tento vztah je tím přesnější, čím více složek tón obsahuje.

2.6. Hladina intenzity

Akustické výkony zdrojů zvuků, s kterými se v praxi setkáváme, jsou ve velmi širokém rozsahu. Například velmi slabý šepot představuje akustický výkon 10^{-9}W, zatímco velký proudový letoun při startu vyzařuje téměř 10^5W. Citlivost lidského sluchu pro tóny různých frekvencí není stejná. Nejcitlivěji vnímáme tóny v rozmezí frekvencí 1000 Hz – 4000 Hz. Zvolme si tón o frekvenci 1000 Hz za tzv. referenční tón f_0 (tedy tón, s nímž budeme porovnávat akustické veličiny jiných tónů). Nejnižší efektivní akustický tlak, při kterém bude tón f_0 ještě slyšitelný (tzv. prahový tlak), je $p_0 = 2 \cdot 10^{-5}$ Pa. Nejvyšší tlak, při kterém v nás tentýž tón ještě nevzbudí pocit bolesti (tlak při prahu bolestivosti), je $p_b = 10^2$ Pa. Rozsah intervalu, v němž můžeme vnímat tento tón, je dán poměrem maximální a minimální intenzity

$$\frac{I_b}{I_0} = \left(\frac{p_b}{p_0}\right)^2 = \left(\frac{10^2}{2 \cdot 10^{-5}}\right)^2 = 2{,}5 \cdot 10^{13} \qquad (16) .$$

Jak vidíme, rozsah tohoto intervalu je velmi vysoký, a bylo by velmi nepřehledné používat pro poměry intenzit lineární stupnici. Proto v těchto případech zavádíme logaritmickou stupnici, která převádí zákonitosti geometrických posloupností na zákonitosti aritmetických posloupností. Zavedení logaritmické stupnice je vhodné také z toho důvodu, že mezi subjektivními vjemy člověka a objektivními akustickými

veličinami je logaritmická závislost (tzv. Weberův-Fechnerův zákon). Nebudeme tedy měřit poměr $\frac{I}{I_0}$, nýbrž $\log\frac{I}{I_0}$. Dekadický logaritmus poměru intenzit označujeme termínem hladina intenzity I vzhledem k intenzitě I_0 značíme ho symbolem L. Tedy platí

$$L = \log\frac{I}{I_0} = \log\left(\frac{p}{p_0}\right)^2 = 2\cdot\log\frac{p}{p_0}. \tag{17}$$

Jestliže do tohoto vztahu dosadíme poměr intenzit (16), zjistíme, že rozsah intervalu hladiny intenzity je přibližně $L \doteq 13$. Zvolme za jednotku stupnice 1 *bel* (1B), potom rozsah stupnice pro hladinu intenzity bude 13 belů. Protože však lidské ucho dokáže rozeznat dva různě silné tóny i v případě, že rozdíl jejich hladin intenzity je 0,1 belu, používáme dílčí jednotky –decibely (dB), kde 1 B = 10 dB. Proto můžeme vztah (17) přepsat do tvaru

$$L = 10\cdot\log\frac{I}{I_0}\,\mathrm{dB} = 20\cdot\log\frac{p}{p_0}\,\mathrm{dB}. \tag{18}$$

V praxi se k měření hladiny intenzity používají tzv. zvukoměry. Hladinu intenzity počítáme stejně nejen pro referenční tón, ale také pro ostatní tóny. Protože však práh slyšení je pro tóny jiných frekvencí odlišný a ve výpočtech používáme vždy prahový tlak $2{,}5\cdot10^{-5}$ Pa, který odpovídá pouze referenčnímu tónu f_0, znamená to, že tóny různých frekvencí se stejnou hladinou intenzity nemají vždy stejnou hlasitost. Musíme rozlišovat, že hladina intenzity je objektivně měřitelná fyzikální veličina, zatímco hlasitost tónů vnímáme subjektivně, proto tyto dva pojmy nesmíme zaměnit.

Vztahy mezi akustickou intenzitou, tlakem a hladinou intenzity udává následující tabulka:

Hladina intenzity $L\ [dB]$	Poměr intenzit $\frac{I}{I_0}$	Intenzita $I\ [\mu W\cdot m^{-2}]$	Akustický tlak $p\ [Pa]$
0	1	10^{-6}	$2\cdot10^{-5}$
40	10^{4}	10^{-2}	$2\cdot10^{-3}$
90	10^{9}	10^{3}	$6{,}3\cdot10^{-1}$
130	10^{13}	10^{7}	63

2.7. Barva tónu

Barva je vedle výšky a hlasitosti třetí důležitou charakteristikou tónu. Ze zkušenosti víme, že můžeme snadno rozeznat od sebe tóny o stejné frekvenci, případně i stejné hlasitosti, pokud jsou zahrány na různé hudební nástroje. Odlišnost stejně vysokých a stejně hlasitých tónů, zahraných např. na klavír nebo na housle, způsobuje právě odlišná barva těchto tónů. Pokud by se nám podařilo zahrát na dva různé nástroje pouze jednoduchý tón stejné frekvence a stejné hlasitosti, pravděpodobně bychom je od sebe neodlišili. Tóny, které se používají v hudbě, jsou však téměř vždy tóny složené. To znamená, že kromě základního tónu mohou současně znít s různou intenzitou i vyšší částkové tóny (někdy vyšší harmonické tóny). U každého nástroje vzniká tón trochu jiným způsobem, a proto se u každého nástroje mohou vytvořit jiné částkové tóny a hlavně s jinými intenzitami, přestože frekvence základního tónu bude ve všech případech stejná. Výška složeného tónu je jednoznačně dána frekvencí jeho základního tónu a barva složeného tónu závisí pouze na počtu vyšších částkových tónů, které znějí současně se základním tónem, a na relativní velikosti jejich amplitud.

2.8. Principy stavby tónových soustav

Tónovou soustavou (systémem) v hudbě rozumíme konečnou množinu tónů uspořádanou podle určitého principu. Postupná řada tónů vybraná podle zvoleného principu a nepřesahující rozsah jedné oktávy se nazývá stupnice. Volbou principu uspořádání tónů je určeno ladění systému, neboli uspořádání vzájemných frekvenčních poměrů tónů stupnice.

Ve starověku a ve středověku byla tónová soustava založena na melodickém principu a vycházela ze dvou základních intervalů, a to kvinty a oktávy. Je-li mezi dvěma tóny interval kvinty, znamená to, že poměr jejich frekvencí je $\frac{3}{2}$. Jak už bylo řečeno výše, interval oktávy označuje relativní výšku 2. Tento typ ladění se nazývá kvintové nebo též pythagorejské ladění.

Na přelomu 15. a 16. století se začalo prosazovat tzv. přirozené ladění. V tomto ladění se k základním stavebním intervalům kvintě a oktávě přidávají ještě další dva, a to velká a malá tercie. Pomocí těchto intervalů lze utvořit všechny tóny stupnice, jak ji známe v dnešním slova smyslu, a získáme tak několik nových intervalů. Protože však intervaly mezi sousedními tóny ve stupnici nejsou úplně stejné, zavedlo se tzv. temperované ladění, které používá ke tvorbě stupnice všechny intervaly vycházející z přirozeného ladění, ale jejich hodnoty jsou mírně pozměněny tak, aby intervaly mezi sousedními tóny stupnice byly stejné.
Nyní rozebereme každý typ ladění podrobněji.

2.9. Pythagorejské ladění

Než se podíváme na konkrétní principy pythagorejského ladění, je důležité vědět, jakým způsobem zacházíme s pojmem interval. Jak již bylo výše řečeno, interval mezi dvěma tóny označuje poměr jejich frekvencí, neboli relativní výšku vyššího tónu vzhledem k nižšímu. Vezmeme si 3 tóny s frekvencemi f_1, f_2, f_3 takové, že $f_1 \leq f_2 \leq f_3$. Pak platí, že interval mezi prvním a druhým tónem je $i_{1,2} = \frac{f_2}{f_1}$, interval mezi prvním a třetím tónem je $i_{1,3} = \frac{f_3}{f_1}$ a interval mezi druhým a třetím tónem je $i_{2,3} = \frac{f_3}{f_2}$. Rozšíříme-li interval mezi prvním a třetím tónem frekvencí f_2, dostaneme $i_{1,3} = \frac{f_3}{f_1} \cdot \frac{f_2}{f_2} = \frac{f_2}{f_1} \cdot \frac{f_3}{f_2} = i_{1,2} \cdot i_{2,3}$, tedy platí

$$i_{1,3} = i_{1,2} \cdot i_{2,3}. \tag{19}$$

To znamená, že pokud utvoříme od tónu f_1 interval $i_{1,2}$, dostaneme tón $f_2 = f_1 \cdot i_{1,2}$, a dále utvoříme od tónu f_2 interval $i_{2,3}$, dostaneme tón $f_3 = f_2 \cdot i_{2,3}$, potom platí, že interval mezi tóny f_1 a f_3 je dán součinem intervalů, z nichž jsme tento výsledný interval složili, tedy $i_{1,2} \cdot i_{2,3}$. Pomocí matematické indukce by šlo dokázat, že tento princip platí pro libovolný počet za sebou poskládaných intervalů. Jestliže tedy od

určitého tónu utvoříme interval složený např. ze dvou kvint a jedné oktávy, výsledný interval bude mít hodnotu $i = \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot 2 = \frac{9}{2}$.

Tohoto postupu budeme používat při stavbě nejen pythagorejského, ale též přirozeného ladění. Nyní se pokusíme sestavit sedmitónovou stupnici v Pythagorejském ladění. Budeme vycházet od tónu *c*. Od tohoto tónu utvoříme 5 kvintových kroků nahoru a jeden kvintový krok dolů a dostaneme následující řadu tónů uspořádaných podle frekvencí:

$$F - c - g - d^1 - a^1 - e^2 - h^2.$$

Nyní všechny tóny, které neleží v malé oktávě, posuneme o příslušný počet oktáv tak, aby tvořily stupnici jediné – malé oktávy. Ukážeme si to na konkrétním příkladu. Tedy např. tón h^2 jsme získali zvýšením původního tónu o 5 kvint a to znamená, že jeho relativní výška vzhledem k tónu *c* je $\left(\frac{3}{2}\right)^5 : 1$. Podle označení vidíme, že tento tón patří do dvoučárkované oktávy, tedy je potřeba ho o dvě oktávy snížit. Dostaneme tak tón *h* o relativní výšce $\left(\frac{3}{2}\right)^5 : 2^2 = \frac{243}{128}$. Tón *F* jsme dostali snížením tónu *c* o jednu kvintu, jeho relativní výška je tedy $1 : \frac{3}{2} = \frac{2}{3}$. Tón *F* patří do velké oktávy, musíme ho proto zvýšit o jednu oktávu a dostaneme tak tón *f* o relativní výšce $\frac{2}{3} \cdot 2 = \frac{4}{3}$. Tento interval se nazývá kvarta. Analogicky přesuneme i ostatní tóny a dostaneme následující sedmitónovou stupnici:

c	*d*	*e*	*f*	*g*	*a*	*H*	(c^1)
1	$\frac{9}{8}$	$\frac{81}{64}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{27}{16}$	$\frac{243}{128}$	2
$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{256}{243}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{256}{243}$	

Čísla v prvním řádku pod stupnicí označují relativní výšku jednotlivých tónů vzhledem k prvnímu tónu *c*, zatímco čísla v druhém řádku udávají relativní výšku dvou sousedních tónů ve stupnici. Vidíme, že tóny ve stupnici jsou od sebe vzdáleny většinou

o interval $\frac{9}{8}$, který nazýváme pythagorejským celým tónem, a dále potom o interval $\frac{256}{243}$, který označujeme jako malý pythagorejský půltón. Interval $\frac{81}{64}$ nazýváme velká pythagorejská tercie, interval $\frac{27}{16}$ je pythagorejská velká sexta a interval $\frac{243}{128}$ je pythagorejská velká septima. Uvedená stupnice má tzv. durový charakter.

Podobně jako jsme vytvářeli durovou stupnici začínající tónem *c*, vytvoříme nyní tzv. mollovou stupnici začínající tónem *a*. Tedy od základního tónu *a* utvoříme dva kvintové kroky nahoru a čtyři kvintové kroku dolů a dostaneme následující řadu tónů, seřazenou podle jejich frekvencí takto:

$$F_1 - C - G - d - a - e^1 - h^1.$$

Dále přesuneme tóny o příslušný počet oktáv tak, aby všechny ležely v jedné oktávě počínající tónem *a*, tedy v rozmezí frekvencí tónů *a*, a^1. Dostaneme tak následující mollovou stupnici (v pythagorejském ladění) počínající tónem *a*:

a		h		c^1		d^1		E^1		F^1		g^1		A^1
1		$\frac{9}{8}$		$\frac{32}{27}$		$\frac{4}{3}$		$\frac{3}{2}$		$\frac{128}{81}$		$\frac{16}{9}$		2
	$\frac{9}{8}$		$\frac{256}{243}$		$\frac{9}{8}$		$\frac{9}{8}$		$\frac{256}{243}$		$\frac{9}{8}$		$\frac{9}{8}$	

Vidíme, že mollová stupnice začínající tónem *a* je tvořena tóny, které mají stejné názvy (pouze některé z nich leží o oktávu výš) jako tóny v durové stupnici začínající tónem *c*. Mezi jejich sousedními tóny jsou také stejné druhy intervalů a dokonce i ve stejném poměru, důležité však je, že jsou tyto mezitónové intervaly v jiném pořadí. Pořadí mezitónových intervalů $\frac{9}{8}$ a $\frac{256}{243}$ je pro stupnici charakteristické a právě podle tohoto pořadí rozlišujeme, zda se jedná o durovou nebo mollovou stupnici. Mezi intervaly jednotlivých tónů stupnice vztažených k základnímu tónu *a* nám přibyly tři nové intervaly a to: pythagorejská malá tercie $\frac{32}{27}$, malá sexta $\frac{128}{81}$ a malá septima $\frac{16}{9}$.

2.10. Přirozené ladění

V pythagorejském ladění byly mezi základními intervaly, pomocí nichž bylo možné vytvořit stupnici, oktáva, kvinta a také kvarta (uvážíme-li, že kvartu dostaneme, složíme-li jeden kvintový krok dolů a jeden oktávový krok nahoru, neboli kvarta je doplňkem kvinty v oktávě), tedy intervaly sestavené pomocí čísel 1:2:3:4. V přirozeném ladění rozšíříme tuto řadu čísel pro základní stavební intervaly až k číslu 6, tedy stupnici budeme sestavovat pomocí základních intervalů sestavených z čísel 1:2:3:4:5:6.
Pro odvození durové stupnice v přirozeném ladění budeme potřebovat tři základní stavební intervaly, a to: 2, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{4}$. Kromě již známé oktávy a kvinty se zde objevuje nový interval $\frac{5}{4}$, který se nazývá přirozená velká tercie. Pro sestavení mollové stupnice v přirozeném ladění potřebujeme základní stavební intervaly: 2, $\frac{3}{2}, \frac{6}{5}$. Zde se objevuje nový interval $\frac{6}{5}$, který označujeme jako přirozená malá tercie. Termín „přirozený“ se u těchto dvou nových intervalů zavádí z toho důvodu, že oba zní lidskému uchu příjemně, na rozdíl od pythagorejské velké tercie $\frac{81}{64}$. Možná právě proto se označuje tento druh ladění jako přirozené, protože je založeno na tzv. harmonickém principu a zní lidskému uchu příjemně.

Nyní odvodíme sedmitónovou durovou stupnici pomocí oktávy, kvinty a velké tercie. V záhlaví tabulky všech následujících stupnic bude označeno pořadí tónů římskými číslicemi a nikoliv jejich názvy z toho důvodu, abychom mohli vytvořit danou stupnici od jakéhokoliv tónu a aby bylo jasně vidět, o který interval se jedná.

I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.
1		$\frac{5}{4}$		$\frac{3}{2}$			2

Ostatní intervaly odvodíme následujícím způsobem. Interval mezi kvintou a oktávou zjistíme jako $2:\frac{3}{2}=\frac{4}{3}$, což je číslo větší než velká tercie, ale menší než kvinta, odpovídá tedy intervalu kvarty. Dále zvýšíme kvintu o velkou tercii a dostaneme interval $\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}=\frac{15}{8}$, který nazveme velkou septimou. Při zvýšení kvarty o velkou tercii vzniká interval $\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4}=\frac{5}{3}$, který označíme jako velkou sextu. Poslední chybějící interval – sekundu vytvoříme tak, že složíme dvě kvinty a vzniklý tón přesuneme o oktávu níž, tedy $\left(\frac{3}{2}\right)^2:2=\frac{9}{8}$. Vzniklá stupnice vypadá takto:

I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII	VIII
1	$\frac{9}{8}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{15}{8}$	2

$$\frac{9}{8} \quad \frac{10}{9} \quad \frac{16}{15} \quad \frac{9}{8} \quad \frac{10}{9} \quad \frac{9}{8} \quad \frac{16}{15}$$

Čísla v prvním řádku pod stupnicí označují relativní výšku jednotlivých tónů vzhledem k prvnímu tónu stupnice. V druhém řádku jsou intervaly mezi sousedními tóny. První tón stupnice nazýváme tónika, pátý tón dominanta a čtvrtý tón subdominanta. Interval $\frac{9}{8}$ nazýváme velký celý tón, interval $\frac{10}{9}$ malý celý tón a interval $\frac{16}{15}$ je velký půltón. Pokud označíme celý tón symbolem „1“ a půltón symbolem „$\frac{1}{2}$“, bez ohledu na to, zda se jedná o malý nebo velký celý tón, můžeme přepsat stavbu každé durové stupnice symbolicky takto:

$$1 \quad 1 \quad \tfrac{1}{2} \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad \tfrac{1}{2}$$

Podobně se teď pokusíme vytvořit stupnici mollovou. Jak již bylo výše řečeno, jako základní stavební intervaly k tomu použijeme oktávu, kvintu a malou tercii – 2, $\frac{3}{2}$, $\frac{6}{5}$. Pomocí nich odvodíme analogicky jako u durové stupnice ostatní potřebné intervaly, mezi nimiž přibudou některé nové. Tedy stejně jako u durové stupnice obdržíme sekundu a kvartu. Dále zvýšíme kvartu o malou tercii a dostaneme interval

$\frac{4}{3}\cdot\frac{6}{5}=\frac{8}{5}$, který nazveme malou sextou. Dále zvýšíme kvintu o malou tercii a dostaneme malou septimu $\frac{9}{5}$, neboť $\frac{3}{2}\cdot\frac{6}{5}=\frac{9}{5}$. Mollová stupnice pak bude vypadat následovně:

I.	II.	III.	IV.	V.	VI	VII	VIII
1	$\frac{9}{8}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{9}{5}$	2

$$\frac{9}{8} \quad \frac{16}{15} \quad \frac{10}{9} \quad \frac{9}{8} \quad \frac{16}{15} \quad \frac{9}{8} \quad \frac{10}{9}$$

Vidíme tedy, že v mollové stupnici se pouze „velké“ intervaly z durové stupnice změnily na „malé“, ale jinak zůstaly stejné jako v durové stupnici. Intervaly mezi sousedními tóny jsou opět velký a malý celý tón a velký půltón jako v durové stupnici, ale je důležité, že se v obou stupnicích liší jejich pořadí, a opět stejně jako v pythagorejském ladění platí, že podle pořadí celých tónů a půltónů ve stupnici můžeme rozlišit různé typy stupnic. Použijeme-li stejné symbolické označení jako u durové stupnice, můžeme uvedenou rovnici zapsat symbolicky takto:

$$1 \quad \tfrac{1}{2} \quad 1 \quad 1 \quad \tfrac{1}{2} \quad 1 \quad 1.$$

Tuto stupnici blíže označíme stupnice mollová aiolská.

Velmi často se však používá tzv. harmonická mollová stupnice, u které je interval malé septimy nahrazen intervalem velké septimy. Schéma této stupnice pak vypadá takto:

I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII	VIII
1	$\frac{9}{8}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{15}{8}$	2

$$\frac{9}{8} \quad \frac{16}{15} \quad \frac{10}{9} \quad \frac{9}{8} \quad \frac{16}{15} \quad \frac{75}{64} \quad \frac{16}{15}$$

V této stupnici se objevuje nový interval $\frac{75}{64}$ mezi sextou a septimou. Tento interval můžeme rozložit na dva menší : $\frac{75}{64} = \frac{9}{8} \cdot \frac{25}{24}$. Tento interval se tedy skládá z velkého celého tónu a dále intervalu $\frac{25}{24}$, který se nazývá malý půltón. Pokud by nás zajímalo, jaký je rozdíl mezi velkou a malou tercií, velkou a malou sextou a velkou a malou septimou, zjistili bychom, že se liší právě o interval malého půltónu, neboť $\frac{5}{4} : \frac{6}{5} = \frac{25}{24}$, $\frac{5}{3} : \frac{8}{5} = \frac{25}{24}$ a $\frac{15}{8} : \frac{9}{5} = \frac{25}{24}$. Použijeme-li stejnou symbolické označení jako u předchozích stupnic, bez ohledu na to, zda se jedná o velký nebo malý půltón, můžeme harmonickou mollovou stupnici zapsat symbolicky takto:

$$1 \quad \tfrac{1}{2} \quad 1 \quad 1 \quad \tfrac{1}{2} \quad 1+\tfrac{1}{2} \quad \tfrac{1}{2}$$

Dalším hodně používaným typem mollové stupnice je tzv. melodická mollová stupnice. V této stupnici se při hře tónů vzestupně nahrazuje nejen malá septima velkou septimou, ale také malá sexta velkou sextou. Při hře stupnice v sestupném směru se používá již zmíněná mollová stupnice aiolská. Melodickou stupnici ve vzestupném směru můžeme symbolicky zapsat takto:

$$1 \quad \tfrac{1}{2} \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad \tfrac{1}{2}.$$

2.11. Zvyšování a snižování tónů v přirozeném ladění

Zvolíme-li za první tón durové stupnice (primu) tón *C*, nazývá se pak tato stupnice *C* dur. Dalšími tóny této stupnice pak jsou *D, E, F, G, A, H, c*, jak už bylo řečeno u pythagorejského ladění. Chceme-li však stupnici začít od tónu *A* a zapíšeme názvy jednotlivých tónů do následujícího schématu,

A	*H*	*c*	*d*	*e*	*f*	*G*	*a*
1	$\frac{1}{2}$	1	1	$\frac{1}{2}$	1	1	

zjistíme, že intervaly mezi sousedními tóny neodpovídají durové nýbrž mollové stupnici. Chceme-li dostat durovou stupnici, musíme zvýšit o malý půltón tóny c, f a g.

Zvýšení tónu se značí v notách symbolem **#** a název zvýšeného tónu vytvoříme tak, že k názvu původního tónu přidám příponu *–is*. Tedy tóny *c*, *f*, *g* se zvýšením změní na *cis*, *fis* a *gis*. Stupnice *A* dur pak vypadá takto: *A H cis d e fis gis a*.

Podobně budeme postupovat při vytvoření stupnice *F* dur. Začneme tvořit stupnici od tónu *F* a při sestavování stupnice pomocí tónů stupnice *C* dur zjistíme, že intervaly mezi sousedními tóny opět neodpovídají schématu durové stupnice. Abychom utvořili opravdu durovou stupnici, museli bychom snížit tón *h* o malý půltón. Snížení tónu se v notách značí symbolem ***b***. Snížený tón *h* má název *b* , snížený tón *e* má název *es*, snížený tón *a* má název *as* a u všech ostatních snížených tónů se jejich název vytvoří tak, že k názvu původního tónu přidáme příponu *–es*. Stupnice *F* dur bude vypadat takto: *F G A B c d e f*.

Jak bylo řečeno, při zvýšení nebo snížení tónu se původní relativní výška mění o malý půltón. Potom ovšem zvýšený tón leží níže než jeho vyšší sousední tón snížený. Tedy např. tón *d* má relativní výšku $\frac{9}{8} = 1{,}125$, jeho zvýšený tón *dis* má relativní výšku $\frac{9}{8} \cdot \frac{25}{24} = 1{,}172$, tón *e* má relativní výšku $\frac{5}{4} = 1{,}25$ a jeho snížený tón *es* má relativní výšku $\frac{5}{4} : \frac{25}{24} = 1{,}2$. Tedy vidíme, že tón *es* je vyšší než tón *dis*. Nyní sestavíme stupnici v rozsahu jedné oktávy, v níž budou všechny tóny, které lze vytvořit pomocí přirozeného ladění, seřazené vzestupně podle relativních výšek:

$$c\ cis\ des\ d\ dis\ es\ e\ fes\ eis\ f\ fis\ ges\ g\ gis\ as\ a\ ais\ b\ h\ ces\ his\ c^1.$$

Nazýváme ji stupnicí enharmonickou. Dále stupnici chromatickou získáme ze stupnice enharmonické tak, že při postupu nahoru vynecháme z enharmonické stupnice všechny snížené tóny a při postupu dolů vynecháme naopak všechny zvýšené tóny. Tedy bude vypadat takto:

$$c\ cis\ d\ dis\ e\ f\ fis\ g\ gis\ a\ ais\ h\ c^1 \quad \text{(vzestupně)}$$

$$c^1\ h\ b\ a\ as\ g\ ges\ f\ e\ es\ d\ des\ c \quad \text{(sestupně)}$$

Z těchto úvah vyplývá, že v přirozeném ladění se od sebe liší výšky tónu snížený a jim odpovídajících tónů snížených. Z toho vyplývá mnoho praktických problémů. Pokud by byly například dva hudební nástroje naladěny podle přirozeného ladění každý v jiné tónině a hrály by zároveň, vzájemně by neladily. Nebo ještě jednodušší příklad: Pokud by byl klavír naladěn v přirozeném ladění např. pro tóninu *D* dur a hráli bychom na něm skladbu napsanou v tónině *D* dur, bylo by všechno v pořádku. Jakmile bychom

však chtěli zahrát tutéž skladbu např. v *Es* dur, už bychom slyšeli, že tóny této skladby vzájemně neladí. Konkrétně u klavíru se tento problém vyřešil zavedením tzv. temperovaného ladění, které je výhodné zvláště pro všechny klávesové nástroje, na kterých se díky jejich velkému rozsahu používají všechny tóniny. U smyčcových nástrojů hudebník vytváří tón sám podle sluchu, a proto v případě potřeby může sám výšku tónu korigovat tak, aby ho sladil s ostatními nástroji. Problém by mohl nastat u dechových nástrojů. U těchto nástrojů je předem známo, v jaké tónině jsou laděny a navíc určité skupiny nástrojů bývají vyrobeny s laděním ve stejných tóninách, které také odpovídají frekvenčnímu rozsahu těchto nástrojů. Např. u žesťových hudebních nástrojů je velmi časté ladění v tónině *F* dur nebo *B* dur.

Přirozené ladění bylo vytvořeno podle harmonického principu, to znamená tak, že řada tónů v přirozeném ladění zní lidskému uchu přirozeně a příjemně. Přesto však některé intervaly znějí méně příjemně než jiné. Bavíme se nyní o tom, zda souzvuk dvou tónů vnímáme jako soulad či nesoulad. Tímto problémem se zabývali již starověcí filozofové pythagorejské školy a tvrdili, že dva tóny jsou v konsonanci neboli v souladu, jestliže lze poměr jejich frekvencí vyjádřit malými celými čísly, a konsonance je tím lepší, čím menší čísla vyjadřují poměr frekvencí. Naopak je-li poměr frekvencí dvou tónů vyjádřen velkými čísly, můžeme říct, že jsou v disonanci, protože při jejich souzvuku vnímáme nesoulad. Podle tohoto pravidla můžeme vysvětlit, proč lidskému uchu zní velmi příjemně interval oktávy, kvinty, kvarty a tercie a naopak proč vnímáme sekundu a septimu jako nelibozvučné intervaly. Hermann Helmholtz přidal k teorii konsonance a disonance tvrzení, že dva tóny tvoří tím dokonalejší konsonanci, čím mají větší počet společných vyšších harmonických tónů. Jsou-li vyšší harmonické tóny dvou tónů nikoliv stejné, ale pouze velmi blízké, tvoří se mezi nimi rázy, které naopak způsobují disonanci. Otázka konsonance a disonance není však problémem akustiky jako spíše subjektivního lidského vnímání.

2.12. Temperované ladění

S rozvojem instrumentální hudby, zvláště pak klávesových nástrojů, bylo nutné zavést novou tónovou soustavu, ve které by se zjednodušily zákonitosti přirozeného ladění i za cenu toho, že by se některé intervaly mírně rozladily (temperovaly). Termín temperovaní je odvozen z latinského *temperare* = mírnit, změkčovat. V minulosti se

používaly dva typy temperovaní – rovnoměrné a nerovnoměrné. Při rovnoměrném temperování se rozladily nepatrně všechny intervaly, ale každý z nich stejně. Zatímco při nerovnoměrném temperovaní se určité základní intervaly zachovaly čisté a ostatní se pak více nebo méně rozladily. Od počátku 18. století převládla metoda rovnoměrného temperování.

Nyní odvodíme podmínku, kterou musí splňovat každá temperovaná soustava. Vytvoříme vzestupnou i sestupnou kvintovou řadu od tónu *c*:

$$\ldots As_2 - Es_1 - B_1 - F - c - g - d^1 - a^1 - e^2 - h^2 - \ldots$$

Kvinta *c* – *g* je dána poměrem $\frac{3}{2}$, velká tercie *c* – *e* poměrem $\left(\frac{3}{2}\right)^4 : 2^2$ a malá tercie *c* – *es* poměrem $\left[1 : \left(\frac{3}{2}\right)^3\right] \cdot 2^2$. Chceme-li vytvořit tónovou soustavu s co nejméně rozladěnými základními intervaly – kvintou a velkou a malou tercií, musíme vynásobit tyto intervaly (s hodnotami převzatými z přirozeného ladění) vhodným číslem neboli temperaturou. Písmeny *q, T, t* si označíme temperaturu kvinty, velké tercie a malé tercie. A musí platit

$$\left(\frac{3}{2}q\right)^4 : 2^2 = \frac{5}{4}T \tag{20}$$

$$\left[1 : \left(\frac{3}{2}q\right)^3\right] \cdot 2^2 = \frac{6}{5}t \tag{21}$$

Po úpravách předchozích dvou rovnic dostaneme vztah

$$q = T \cdot t\,. \tag{22}$$

Tedy základní podmínkou správného temperování je, aby temperatura kvinty byla vždy součinem temperatur malé a velké tercie.

Při rovnoměrně temperovaném ladění se vylaďují oktávy vždy čistě. Interval oktávy se pak rozdělí na dvanáct stejných temperovaných půltónů. Jestliže označíme frekvenci základního tónu *f* a velikost temperovaného půltónu *x*, pak tón zvýšený o půltón bude mít frekvenci $f \cdot x$. Zvýšíme-li tón o dva půltóny neboli o celý tón, dostaneme tón o frekvenci $f \cdot x^2$ atd. Zvýšíme-li tón o dvanáct půltónů, dostaneme oktávu k původnímu tónu, a platí $f \cdot x^{12} = 2f$. Z toho vyplývá vztah pro velikost temperovaného půltónu:

$$x = \sqrt[12]{2} = 1{,}05946\ldots. \tag{23}$$

Dvanáctitónová chromatická stupnice v temperovaném ladění, postupující po půltónových intervalech, je v dnešní době jednou ze základních stupnic v evropské hudbě. Její výhoda je v tom, že pokud zvýšíme např. tón *c* o půltón, dostaneme tón *cis*, a dále snížíme tón *d* o půltón, dostaneme tón *des*, pak tóny *cis* a *des* mají v temperovaném ladění frekvenci stejnou, zatímco v přirozeném ladění frekvenci různou. Z tohoto důvodu lze v temperovaném ladění snadno transponovat určitou skladbu do různých tónin a nemusíme se bát, že by v některé tónině skladba zněla rozladěně, jak by tomu bylo u přirozeného ladění. Možná by někdo mohl přijít s otázkou, proč v temperovaném ladění rozdělujeme interval oktáv právě na dvanáct stejných intervalů. Je to proto, abychom se co nejvíce přiblížili přirozenému ladění a tedy proto, aby vytvořená řada tónů zněla lidskému sluchu příjemně.

2.13. Mezinárodní a fyzikální ladění

Nástroje v orchestru a hlasy v pěveckých sborech se ladí podle tzv. frekvenčního normálu, tedy podle dohodnuté frekvence pro určitý tón. Mezinárodní komise pro normy ISA (International Standard Assotiation) stanovila v roce 1939 v Londýně za frekvenční normál pro tón a^1 frekvenci 440 Hz. Tento frekvenční normál se dodnes používá. Jeho výhoda spočívá v tom, že kmitočty tónu *c* se ve všech oktávách – kromě *subkontra C* o frekvenci 16,5 Hz – dají vyjádřit celými čísly. Všechny druhy ladění, v nichž se vychází z frekvenčního normálu a^1 440 Hz, označujeme jako mezinárodní ladění.

Při akustických měřeních se často vychází z tzv. fyzikálního ladění, kde se za frekvenční normál volí tón *subkontra-C* s kmitočtem 16 Hz. Tón a^1 je pak tónem odvozeným od tónu C_2 a má frekvenci 430,5 Hz. Fyzikální ladění je ladění temperované a hodnoty intervalů se měří v temperovaných půltónech. Jeho výhodou je, že můžeme absolutní výšky tónu *c* ve všech oktávách vyjádřit jako mocniny čísla 2.

3. Akustika hudebních nástrojů

V této celé kapitole budeme zkoumat principy vzniku zvuku u jednotlivých typů hudebních nástrojů. Podle těchto principů můžeme nástroje rozdělit do následujících čtyř kapitol, v kterých se budeme zabývat kmitáním struny, chvěním tyčí a desek, kmitáním membrány a kmitáním vzduchového sloupce.

3.1. Chordofony

3.1.1. Rozdělení a konstrukce chordofonů

Chordofony (řec. *chordé* = struna) jsou takové hudební nástroje, u kterých zvuk vzniká kmitáním struny. Barva tónu strunných nástrojů závisí na poloze bodu, v němž strunu rozechvíváme, a na způsobu, jímž jsme strunu uvedli do chvění. Podle způsobu rozechvívání strun můžeme strunné nástroje rozdělit na drnkací, kladívkové a smyčcové.

U struny převládá jeden rozměr nad dalšími dvěma, tedy struna je lineární oscilátor a jednotlivé body struny kmitají s různými amplitudami. Všechny body struny kmitají kolmo na směr délky struny, konají tedy příčné kmity. Poněvadž struna má poměrně malou hmotnost, je i energie vysílaná strunou nepatrná. Aby se intenzita tónu struny zvětšila, napíná se struna k rezonanční (ozvučné) skříňce, s kterou je mechanicky těsně spřažena. Tuto rezonanční skříňku nazýváme také korpusem nástroje (lat corpus = tělo, těleso). V korpusu je téměř zcela uzavřený vzdušný prostor určitého objemu. Proti struně má rezonanční skříňka mnohem větší povrch i hmotnost, a strunou vynucené kmity bodů korpusu mohou proto vyvolat v okolním vzduchu periodické tlakové změny značné velikosti. Nástrojem vyzařovaná energie se tak podstatně zvyšuje. Kmity samotné struny se však utlumí mnohem dříve, než kdyby kmitala sama o sobě. Struna je s korpusem spojena prostřednictvím kobylky, která vytváří těsnou mechanickou vazbu mezi oběma kmitavými systémy. Oscilátor – struna a rezonátor – ozvučná skříňka jsou systémy, z nichž každý má své vlastní frekvence, které jsou mechanickou vazbou vzájemně ovlivňovány. Větší vliv na charakter zvuku strunného nástroje má ozvučná skříňka, protože její hmotnost je podstatně větší. Rezonanční skříňky jsou rezonátory

silně tlumené, aby mohly reagovat na větší interval frekvencí struny. Tento problém souvisí s šířkou rezonanční křivky. Čím je rezonanční křivka systému širší a plošší, tím více je systém tlumený a tím širší interval frekvencí může rezonancí zesílit. U smyčcových nástrojů však není velký útlum na závadu, protože při tahu smyčcem se struně dodává stále nová energie. U ostatních strunných nástrojů by byl příliš velký útlum méně vítaný. Struny se zde proto napínají na ozvučné skříňku o menším útlumu, doba vyznívání se tak poněkud prodlužuje. Poněvadž ozvučné skříňky – v podstatě desky - mají velký počet vlastních frekvencí, reagují přibližně stejně na každou frekvenci struny a zesílení celé tónové oblasti je pak značně rovnoměrné. Rezonanční skříňka většinou není úplně uzavřená, ale má jeden nebo více otvorů, které zprostředkovávají kontakt kmitajících vzduchových částic uvnitř nástroje s částicemi venku. Jestliže tyto otvory zakryjeme, intenzita zvuku vydávaného nástrojem se sníží.

3.1.2. Kmity struny

Nyní se podíváme blíž na samotné kmity struny. Uvážíme ohebnou, pružnou strunu napnutou podél osy x, upevněnou na obou koncích, a budeme sledovat příčný pohyb bodů struny v pevné rovině obsahující osu x. Použijeme druhý Newtonův zákon k popisu pohybu krátkého úseku struny ohraničeného body A,B, který se původně nachází mezi body x a $x+\Delta x$. Jestliže hmotnost struny na jednotku délky je μ, hmotnost úseku struny bude $\mu\Delta x$. Jestliže vychýlíme strunu z její rovnovážné polohy, bod A se vychýlí ve směru kolmém na osu x o hodnotu $y(x)$, bod B o hodnotu $y(x+\Delta x)$. Nechť tečna ke struně svírá v bodě A s osou x úhel α a v bodě B úhel $\alpha+\Delta\alpha$. V bodě A působí na úsek struny napínací síla F ve směru tečny, v bodě B působí na strunu stejně velká síla F, rovněž ve směru tečny. Potom síla působící na úsek struny ve směru osy y je dána vztahem

$$F_y = -F\sin\alpha + F\sin(\alpha+\Delta\alpha). \qquad (1.1)$$

To můžeme dále upravit do tvaru: $F_y = F(-\sin\alpha + \sin\alpha\cos\Delta\alpha + \cos\alpha\sin\Delta\alpha)$. Pro dostatečně malé úhly α, $\Delta\alpha$ a rozvinutím funkcí $\sin x$, $\cos x$ do Taylorova rozvoje, kde pro malá x můžeme zanedbat členy od kvadratického výše, dostaneme aproximace $\sin\alpha \doteq \alpha$, $\sin\Delta\alpha \doteq \Delta\alpha$, $\cos\alpha \doteq 1$, $\cos\Delta\alpha \doteq 1$. Po jejich dosazeni do vztahu (1.1) obdržíme

$$F_y = F\Delta\alpha \,. \tag{1.2}$$

Pro nekonečně malý úsek struny můžeme veličiny Δx a $\Delta\alpha$ nahradit jejich diferenciály. Víme také, že výchylka určitého bodu struny y(x) závisí nejen na poloze tohoto bodu (souřadnice x), ale je také funkcí času. A platí:

$$tg\alpha = \frac{\partial y(x,t)}{\partial x}\,, \tag{1.3}$$

po zderivování dostaneme

$$\frac{d\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}dx\,, \tag{1.4}$$

a tedy

$$d\alpha = \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}dx\,. \tag{1.5}$$

Nyní již můžeme napsat druhý Newtonův zákon ($F=ma$) a po dosazení ze vztahů (1.2) a (1.5) ho dostáváme ve tvaru

$$\mu dx\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = F\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}dx \tag{1.6}$$

a po úpravě

$$\frac{\mu}{F}\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}\,. \tag{1.7}$$

Veličina $\frac{\mu}{F}$ má rozměr s^2m^{-2}, můžeme ji tedy nahradit výrazem $\frac{1}{v^2}$, kde symbol v znamená rychlost šíření kmitavého rozruchu na struně. Konečný tvar pohybové rovnice struny

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} \tag{1.8}$$

nazýváme vlnovou rovnicí. Je to parciální diferenciální rovnice. Její řešení budeme předpokládat ve tvaru:

$$y(x,t) = f(x)\sin\omega t \quad , \tag{1.9}$$

kde f(x) je zatím neznámá funkce. Po dosazení do vlnové rovnice dostáváme:

$$-\frac{1}{v^2}\omega^2 f(x)\sin\omega t = \frac{d^2 f(x)}{dx^2}\sin\omega t$$

odkud dostáváme diferenciální rovnici

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} + \frac{1}{v^2}\omega^2 f(x) = 0\,, \tag{1.10}$$

jejíž řešení má tvar $f(x) = A\sin(\frac{\omega}{v}x + \varphi)$. Po dosazení do vztahu (1.9) dostaneme konečný vztah pro výchylku bodu na struně

$$y(x,t) = A\sin(\frac{\omega}{v}x + \varphi)\sin\omega t\,. \tag{1.11}$$

Nyní do úvahy zahrneme okrajové podmínky. Na začátku jsme předpokládali, že struna je upevněna na obou koncích. Na koncích struny musí být tedy výchylka vždy nulová. Umístíme-li začátek struny do bodu $x = 0$ a označíme-li délku struny L, můžeme okrajové podmínky zapsat takto: $y(0,t) = 0$ a zároveň $y(L,t) = 0$. To je možné pouze v tom případě, že $\varphi = 0$ a zároveň $\sin(\frac{\omega}{v}L) = 0$ a z toho vyplývá vztah

$$\frac{\omega}{v}L = n\pi\,,$$

kde n je přirozené číslo. Pro kruhovou frekvenci ω tak dostáváme vztahy

$$\omega_n = n\frac{\pi v}{L}\,. \tag{1.12}$$

Uvážíme-li, že $\omega = 2\pi f$, kde f značí frekvenci kmitů struny, a dále z předchozího označení $v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$, pak pro vlastní frekvence kmitů struny platí

$$f_n = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{F}{\mu}} \tag{1.13}$$

a tedy pro frekvenci základního módu kmitů struny a zároveň frekvenci základního tónu struny (pro $n = 1$) platí

$$f_1 = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{F}{\mu}}\,. \tag{1.14}$$

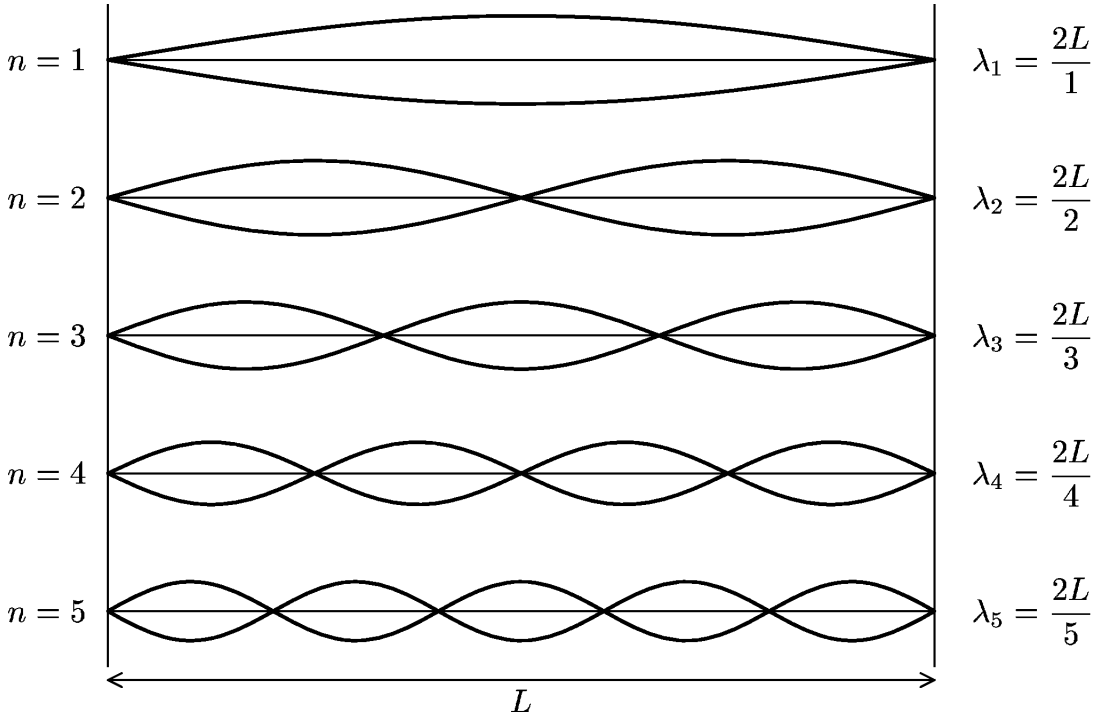
Ze vztahů (1.13) a (1.14) je vidět, že

$$f_n = nf_1, \tag{1.15}$$

a z toho vyplývá, že kromě základního tónu mohou na struně vznikat sudé i liché vyšší harmonické tóny. Prakticky to vypadá tak, že při základním módu tvoří okrajové body struny uzly a v polovině struny je kmitna. Délka struny L je v tomto případě polovinou vlnové délky λ Pro $n = 2$ se vytvoří v polovině struny další uzel, frekvence kmitů bude dvojnásobná, délka struny L tvoří dvě půlvlny. Pro $n = 3$ bude struna rozdělena dvěma uzly na tři půlvlny a frekvence bude trojnásobná, atd. Obecně tedy při frekvenci f_n

bude struna uzly rozdělena na n půlvln a rozestupy mezi jejími uzly budou $\frac{L}{n}$ a $\lambda_n = \frac{2L}{n}$, jak je vidět na obrázku 1.1.

Obr. 1.1. Kmity struny



Hmotnost struny na jednotku délky μ můžeme napsat také jako $\frac{\pi d^2}{4}\rho$, kde d je průměr struny a ρ její hustota. Potom můžeme vztah (14) přepsat do tvaru

$$f_1 = \frac{1}{Ld}\sqrt{\frac{F}{\pi\rho}}\,, \tag{1.16}$$

což je známý Taylorův vzorec pro kmitočet tónu struny. Taylorův vzorec byl odvozen za předpokladu, že struna je dokonale ohebná. V praxi se ukazuje, že v důsledku nedokonalé pružnosti strun je nutno vzorec (1.16) korigovat. Dobře se osvědčuje empirický Seebeckův vztah:

$$f = f_1\left(1 + \frac{d^2}{4L}\sqrt{\frac{\pi E}{F}}\right), \tag{1.17}$$

kde f_1 je frekvence tónu struny vypočtená podle vztahu (16), f je korigovaná, praxi bližší frekvence a E je Youngův modul pružnosti v tahu u uvažované struny.

3.1.3. Tvoření tónů na strunných nástrojích

Nyní se vrátíme k samotným strunným nástrojům. Ze vztahů (1.16) a (1.17) je vidět, že základní frekvence kmitů struny závisí na materiálu, z něhož je vyrobena, na jejích rozměrech a na síle, která ji napíná. Chceme-li, aby strunný hudební nástroj vydával tóny různých frekvencí, dá se to zařídit několika způsoby. Jeden způsob spočívá v tom, že na rezonanční skříňce nástroje je napnuto několik strun, které mají stejnou délku, ale liší se svým průměrem a někdy i materiálem. Každá struna na jednom svém konci prochází otočným šroubem, kterým lze měnit napínací sílu struny. Tímto způsobem strunu doladíme na frekvenci, kterou potřebujeme. Rozkmitáme-li potom jednotlivé struny nástroje, získáme tak tolik různých tónů, kolik je strun. Další možnost je, že struny napjaté na rezonanční skříňce mají různou délku a mohou, ale nemusí mít stejný průměr. Takovým nástrojem je např. harfa nebo lyra. Počet možných tónů se opět rovná počtu strun.

Pokud chceme, aby počet tónů vydávaných nástrojem byl vyšší než počet jeho strun, zařídíme to pomocí tzv. hmatníku, který je součástí rezonanční skříňky nástroje. Chce-li hráč změnit frekvenci kmitů struny, přitiskne jednou rukou v určitém místě strunu k hmatníku a druhou rukou rozkmitá část struny. Tímto způsobem se vlastně mění délka struny a tedy i její frekvence. Pro snadnější orientaci jsou u některých nástrojů na hmatníku tzv. pražce. Jsou to tenké kovové pásky vsazené do dřeva hmatníku v určitých rozestupech od sebe, které z hmatníku mírně vystupují. Jestliže přitiskneme prstem strunu k hmatníku před některým pražcem, struna se tak dotkne vyčnívajícího pražce a její chvějná délka sahá jen od pražce ke kobylce. Pražec je užší, tvrdší a ostřejší než prst, proto se kmity struny tlumí méně, než kdybychom délku struny ohraničili jenom prstem (podobně jako se liší úder na strunu měkkým nebo tvrdým kladívkem). K těmto nástrojům s pražci patří např. kytara nebo mandolína. Hmatníky bez pražců pak mají všechny smyčcové nástroje.

Barva tónu závisí na poměru, v němž jsou vzbuzeny různé vyšší harmonické tóny. Chceme-li zkoumat výskyt vyšších harmonických tónů u nějakého zvuku, zajímá nás jednak to, které harmonické tóny daný zvuk obsahuje a které ne, a dále jejich intenzita. Zastoupení jednotlivých harmonických tónů u strunných nástrojů závisí na místě, v kterém byla struna rozkmitána. Jestliže rozkmitáme strunu přímo v jejím

středu, nevytvoří se sudé harmonické tóny, protože pro všechny tyto tóny leží jeden z uzlů v polovině struny. Stejně tak při rozechvění struny v jedné čtvrtině její délky se nevytvoří vyšší harmonické tóny s pořadovými čísly 4, 8, 12, 16, … Obecně tedy, rozkmitáme-li strunu v jedné *k*-tině délky struny, nebudou znít harmonické složky s pořadovým číslem, které je násobkem čísla *k*.

Intenzita jednotlivých harmonických tónů závisí jednak na způsobu, jakým strunu rozezníme, a jednak také na místě, v němž strunu rozkmitáme. Jak již bylo řečeno v předchozím odstavci, rozkmitáme-li strunu v místě, v kterém má uzel některý vyšší harmonický tón, pak se tento harmonický tón vůbec nevybudí. Rozkmitáme-li však strunu ne přímo v místě uzlu některého vyššího harmonického tónu, ale v jeho těsné blízkosti, příslušný harmonický tón se sice vybudí, ale bude mít malou intenzitu.

Nyní tento problém rozebereme z hlediska způsobu rozkmitání struny. Rozezníme-li strunu drnknutím, dodaná energie se mezi vyšší harmonické tóny rozdělí takovým způsobem, že *k*-tý harmonický tón bude znít s intenzitou $\frac{i}{k^2}$, kde *i* je intenzita základního tónu. Je známo, že všechny liché harmonické tóny sedmým počínaje znějí nelibozvučně vzhledem k základnímu tónu. Sedmý harmonický tón bude mít vzhledem k základnímu tónu intenzitu $\frac{1}{49}$, což jsou asi 2 procenta. Z toho je vidět, že harmonické tóny vyšší než šestý přispívají k výslednému tónu jen velmi málo a struna rozkmitaná drnknutím tak bude vydávat téměř zcela libozvučný zvuk.

Struna však bude znít jinak, rozkmitáme-li ji úderem. Udeříme-li strunu tvrdým ostrým kladívkem, dodaná energie se rozdělí mezi všechny harmonické tóny stejnoměrně, ovšem za předpokladu, že by struna byla dokonale ohebná. V praxi tomu tak není a vlivem určité tuhosti struny se nejvyšší harmonické tóny nevytvoří. Přesto však vzniká kromě základního tónu ještě mnoho vyšších harmonických tónů s přibližně stejnou intenzitou jako základní tón a většina z nich zní nelibozvučně i se základním tónem i vzájemně. Proto struna rozkmitaná úderem vydává ostrý, pronikavý tón kovového rázu. Z praktické zkušenosti vyplývá, že čím vyššího řádu je harmonický tón, tím rychleji se tlumí. Jestliže prodloužíme dobu nárazu kladívka na strunu, snížíme tak energii, která připadá na vyšší harmonické tóny a výsledný zvuk je pak měkčí a příjemnější. Trvání nárazu prodloužíme tak, že kladívko obalíme měkkým, pružným materiálem, např. silnou vrstvou kůže nebo plsti. Další možnost, jak zmírnit

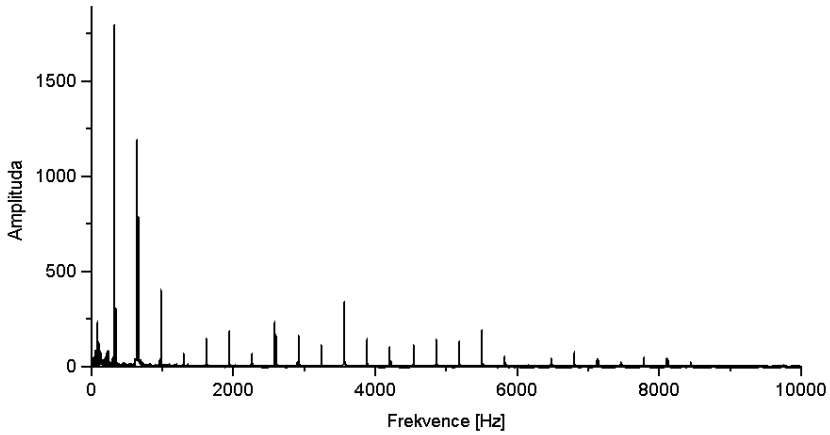
nelibozvučné harmonické tóny, je ta, že strunu rozkmitáme v $\frac{1}{7}$ nebo v $\frac{1}{9}$ délky struny, a vymizí tak sedmý nebo devátý harmonický tón. U klavírních strun pro hluboké tóny kladívko dopadá do $\frac{1}{8}$ délky a vzhledem k šířce kladívka se utlumí nejen osmý harmonický tón, ale také sousední sedmý a devátý.

3.1.4. Drnkací nástroje

Strunné hudební nástroje rozechvívané drnknutím můžeme rozdělit podle toho, zda jejich struny rozkmitáváme prstem nebo trsátkem, případně plektrem (prstenec s hrotem, který se nasazuje na palec). Při rozechvívání struny prstem je tón měkčí, při rozkmitávání trsátkem nebo plektrem se výrazněji projevují šumy a vyšší harmonické tóny provázející základní tón.

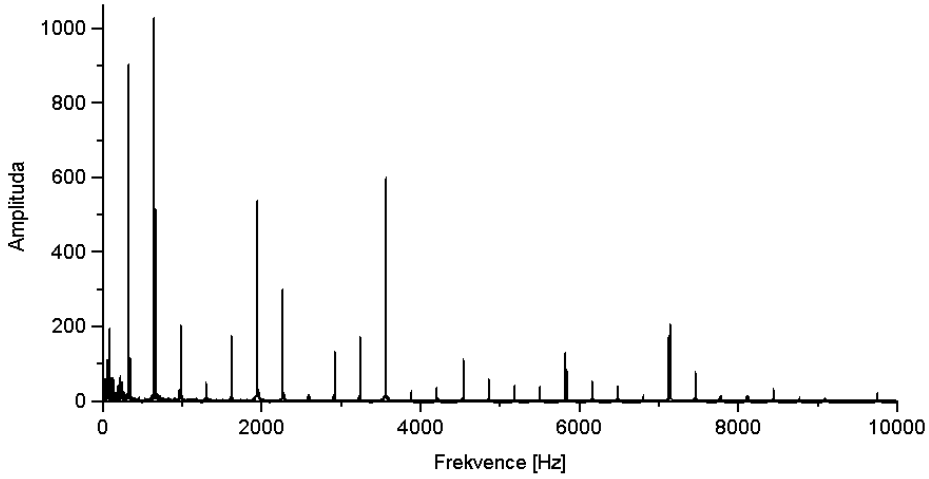
Kytara patří mezi nejznámější drnkací strunné nástroje. Její rezonanční skříňka se skládá se ze dvou plochých desek ve tvaru osmičky , které jsou spojeny luby (bočními stěnami). K rezonanční skříňce je připojen krk nástroje. Tělo i krk kytary bývají přibližně stejně dlouhé, celková délka nástroje je asi 90 až 95 cm. Zadní deska i boční stěny kytary jsou vyrobeny obyčejně z javorového nebo palisandrového dřeva. Přední deska je ze smrkového dřeva a uprostřed má kruhový rezonanční otvor. Krk kytary tvoří hmatník s kovovými pražci a je ukončen tzv. hlavicí, v které jsou umístěny ladicí šrouby.

Obr. 1.2. Fourierova analýza struny kytary rozkmitané prstem



Na přední desce kytary je přes nízkou kobylku nataženo 6 strun, které vedou přes hmatník až k ladícím šroubům a jsou naladěny na tóny E, A, d, g, h, e_1. Některé kytary mají 12 strun, ale jsou naladěny po dvou na stejné tóny jako u šestistrunné kytary. Pouze pro tři nejhlubší dvojice strun je vždy jedna struna dvojice naladěna o oktávu výš než druhá, tedy na tóny e, a, d_1. Kytarista při hře prsty levé ruky zkracuje délky zvučících částí strun na hmatníku a pravou rukou rozeznívá struny přibližně v oblasti rezonančního otvoru, a to buď prsty nebo trsátkem. Při hře trsátkem je tón výraznější, při hře prsty měkčí a tišší.

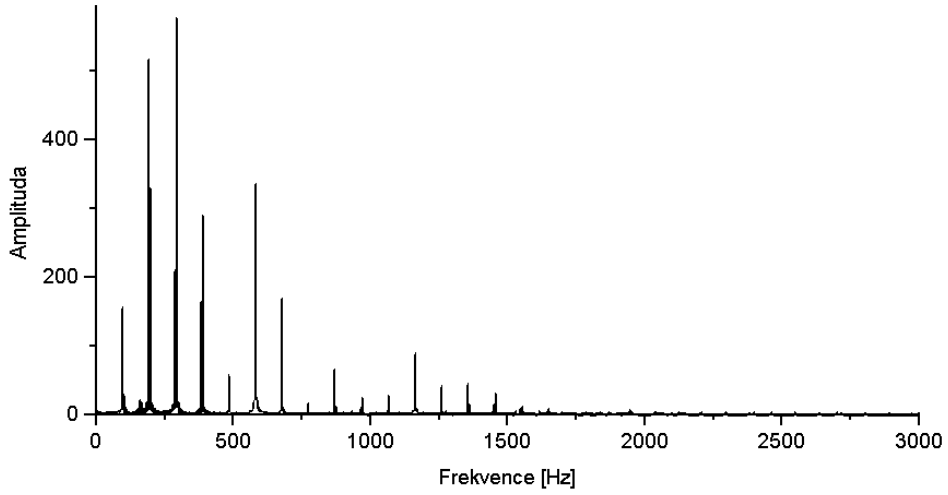
Obr. 1.3. Fourierova analýza struny kytary rozkmitané trsátkem



Dalších odlišností v barvě zvuku můžeme dosáhnout volbou strun. V současné době se používají nejčastěji struny kovové a dále struny nylonové. Kovové struny zní jasněji a výrazněji, nylonové struny vydávají měkčí a tlumenější zvuk a jsou vhodné pro klasickou hru. Jestliže napneme na kytaru nové struny a chceme je pomocí ladicích šroubů naladit na určitou frekvenci, půjde to s kovovými strunami rozhodně snadněji než s nylonovými. Jestliže totiž kovovou strunu napneme zpočátku určitou tahovou silou, napětí ve struně nebude příliš kolísat a požadovaná frekvence se udrží stálá. Napneme-li však stejným způsobem nylonovou strunu, napětí ve struně za chvilku poněkud povolí a musíme ji doladit znovu. Může tak trvat několik dní, než strunu naladíme na požadovanou frekvenci tak, aby se napětí ve struně ustálilo a frekvence nekolísala. Je to způsobeno odlišnou vnitřní strukturou kovu a nylonu. Nylon patří do skupiny polyamidů, vyrábí se polymerací a při deformaci v tahu se chová jinak než kov. V první fázi napínání se molekuly nejprve řadí za sebe do řetězce ve směru tahové

síly. Teprve po jejich seřazení se napětí ve struně může ustálit. Proto nemůžeme nylonovou strunu trvale naladit, dokud se její vnitřní struktura nepřizpůsobí. U nylonu tedy pozorujeme plastickou deformaci. Vnitřní struktura kovu je jednodušší, protože jeho částice jsou uspořádány v krystalové mřížce, a nemusí se tedy při začátku deformace příliš přesouvat.

Obr. 1.4. Fourierova analýza basové kytary

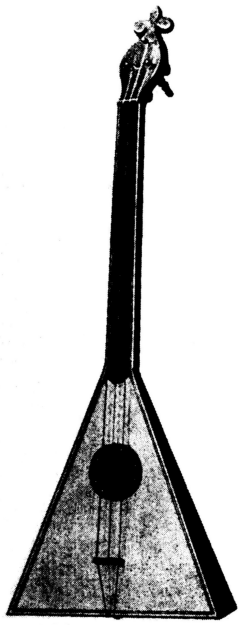


Harfa je mnohostrunný drnkací nástroj trojúhelníkového tvaru a vyrábí se z javorového dřeva. Jednu stranu trojúhelníku tvoří opěrný sloup, který je zakončený ozdobnou hlavicí. Horní, nejkratší strana trojúhelníku je esovitě zakřivená a tvoří tzv. krk nástroje. Třetí stranu tvoří rezonanční skříňka nástroje. Rezonanční skříňka je asi 120 cm dlouhá, má obdélníkový průřez, který se odshora rozšiřuje. V horní desce rezonanční skříňky jsou po celé její délce v dírkách uchyceny struny a druhým koncem jsou provlečeny v kovových kolíčcích na krku nástroje a dále vedou k ladícím šroubům, rovněž na krku nástroje. Všechny struny jsou napnuty rovnoběžně s opěrným sloupem. V dolní části rezonanční skříňky je umístěno sedm pedálů, pomocí kterých je možné přeladit všechny struny do jiné tóniny. Každý z nich lze sešlápnout do dvou různých poloh, jedna posunuje zvuk strun o půltón, druhá o celý tón. Pomocí sedmi pedálů tak můžeme přeladit struny postupně do všech tónin. Struny harfy hráč rozeznívá svými prsty. U harfy se příliš neuplatní vyšší harmonické tóny. Její dynamické rozpětí je asi 22 až 30 dB.

Mandolína je typický italský lidový nástroj. Její rezonanční skříňka má tvar mandle a je dlouhá asi 31 cm. Její tykvovitě vyklenuté dno se skládá z 15 javorových nebo palisandrových pásků. Víko ze smrkového dřeva je rovné, v dolní části mírně skloněné. Uprostřed je elipsovitý rezonanční otvor a pod ním je štítek z tmavého dřeva, který chrání desku, aby se nepoškodila při drnkání trsátkem. Na tělo mandolíny navazuje krk ukončený hlavicí s ladícími kolíčky a na něm je hmatník s kovovými pražci. Ve struníku na okraji klenutého dna je uchyceno 8 kovových strun, které jsou laděny po dvou na stejný tón. Struny jsou napnuty přes nízkou ebenovou kobylku, vedou nad hmatníkem a na konci jsou provlečeny ladícími kolíčky v hlavici. Celková délka krku a hlavice je asi 30 cm. Struny jsou naladěny stejně jako housle na tóny g, d_1, a_1, e_2. Při hře na mandolínu podobně jako u kytary levou rukou tiskneme struny k hmatníku a trsátkem v pravé ruce rozezníváme struny. Trsátko může být želvovinové nebo celuloidové.

Balalajka je drnkací nástroj a pochází z Ukrajiny. Je pro ni charakteristický trojúhelníkový tvar její rezonanční skříňky. Ta opět přechází v krk s hmatníkem, ovšem bez pražců. V její horní desce je kruhový rezonanční otvor. Přes kobylku jsou napnuty pouze 3 struny a vedou přes hmatník k ladícím šroubům v hlavici. Struny jsou naladěny většinou v kvartách, ale někdy bývají první dvě struny naladěny na stejný tón. Struny se rozeznívají trsátkem.

Obr. 1.5. Balalajka (převzato z [7])



Banjo je drnkací nástroj pocházející z Portugalska. Jeho tělo tvoří tamburínový bubínek potažený kůží, na který navazuje dlouhý krk s kovovými pražci. Má 4 až 7 kovových strun, které jsou laděny v kvintách.

Citera je mnohostrunný drnkací nástroj, vyrobený z javorového nebo palisandrového dřeva. Má plochou rezonanční skříňku s rovným dnem i víkem, přední stěna je esovitě prohnutá. Ve střední části víka je kruhový nebo eliptický rezonanční otvor. Průměrné rozměry rezonanční skříně jsou asi 60x35 cm. Citera má 5 kovových melodických strun vedených nad mírně klenutým hmatníkem s vysokými kovovými pražci. Na tyto melodické struny se vydrnkává hlavní melodie. Nad zbývající částí víka je napnuto 24 - 42 doprovodných strun o různých délkách. Při hře na citeru prsty levé ruky tisknou k hmatníku melodické struny, které jsou rozechvívány plektrem navlečeným na palci pravé ruky. Ostatní prsty pravé ruky rozechvívají doprovodné struny.

Cembalo je mnohostrunný klávesový nástroj a na první pohled se podobá klavíru nebo spíše pianinu. Základní rozdíl je však v tom, že zatímco struny klavíru a pianina se rozkmitávají úderem kladívka, struny cembala se rozechvívají drnknutím. Rezonanční skříňka má zhruba trojúhelníkovou podstavu a nad rezonanční deskou ve vodorovné rovině jsou nataženy různě dlouhé struny. Struna může být rozkmitána drnknutím háčku (jazýčku), který se uvede do pohybu stiskem klávesy. Pokud je háček kovový (měděný) , vznikne tón, který připomíná barvou harfu. Pak říkáme, že cembalo má harfový rejstřík. Použije-li se háček z volské kůže, který je měkčí, při kontaktu se strunou se nevybudí vyšší harmonické tóny a tón zní měkčeji. Tento rejstřík nazýváme loutnový. Téhož rejstříku lze dosáhnout také tím, že ke strunám přilehne lišta potažená plstí nebo flanelem. Cembalo má oproti klavíru tu nevýhodu, že stiskem klávesy nelze nijak ovlivnit délku trvání tónu ani jeho barvu. Háček totiž drnkne strunu pokaždé stejným způsobem. Ve srovnání s klavírem tón zní krátce a tvrdě, bez ohledu na to, jak dlouho držíme klávesu stisknutou. K odlišení barvy a hlasitosti se začala v 17.století vyrábět vícemanuálová cembala (tzn. nástroj obsahoval dvě nebo více klávesnic – manuálů nad sebou, z nichž každý vydával tóny jiného rejstříku). Dynamické rozpětí cembala je asi 15 dB. Pro cembalo se někdy používá také název klavicembalo nebo spinet.

3.1.5. Kladívkové nástroje

Mezi kladívkové strunné hudební nástroje můžeme zařadit klavír, pianino a cimbál.

Klavír se skládá ze skříně, ozvučné desky, litinového rámu (na němž jsou napnuty struny) a mechaniky kláves a pedálů. Skříň je dřevěná konstrukce, postavená na třech nohách a má dno, stěny a odklápěcí víko. Uvnitř skříně je rezonanční deska, vyrobená většinou ze smrkového dřeva, nad níž je umístěn litinový rám se strunami. Každá struna je napínána silou řádově 100 N, rám tak musí snést velký tah strun až 180 kN. Pro barevnou kvalitu tónů by bylo ideální, kdyby všechny struny klavíru byly vyrobeny ze stejného materiálu. Protože však frekvence tónu závisí na délce struny, znamenalo by to, že zatímco pro vysoké tóny bychom museli napínat na rám velmi krátké struny, pro hluboké tóny by to byly struny několik metrů dlouhé. Abychom se vyhnuli těmto délkovým extrémům, zvýšíme u strun pro hlubší tóny jejich délkovou hustotu. Z tohoto důvodu se basové struny opřádají tenkým měděným postříbřeným drátem. I tak jsou však delší a tím mají i vyšší hmotnost než struny pro vyšší tóny. Proto se také liší akustická energie, kterou vyzařují. Aby bylo možné hrát všechny tóny stejně hlasitě, napínají se pro tóny středních frekvencí místo jedné struny dvě nebo tři stejné délky a pro tóny vysokých frekvencí struny čtyři.

Pod strunami je uložena mechanika klavíru. Skládá se z kláves, kladívek a dusítek. Klávesa je vlastně dvouramenná páka , na jejíž přední rameno se hraje a druhé je uloženo pod strunami. Stiskem klávesy se zvedne její zadní část a uvede do pohybu zařízení, které ke struně vymrští dřevěné kladívko. Po úhozu odskočí kladívko od struny pomocí pérového mechanizmu a struna může volně kmitat. Aby však struna nezněla i po uvolnění klávesy, přilehne k ní dřevěné dusítko umístěné na klávesové páce, které má na spodní straně plstěný polštářek přiléhající zespodu na struny. Stiskneme-li klávesu znovu, dusítko od struny opět odskočí. Klavíry mohou mít buď anglickou nebo vídeňskou mechaniku. Anglická mechanika používá kladívka potažená plstí a dusítka má umístěna jednotlivě na klávesových pákách. Vídeňská mechanika kladívka navíc (kromě plsti) potahuje ještě jelenicí a dusítka má umístěna na zvláštní společné liště, která se ke strunám přiblíží po sešlápnutí pravého pedálu. Další rozdíly jsou v mechanizmu mezi klávesou a kladívkem. Obecně se více používá mechanika anglická, protože u anglické mechaniky kladou klávesy při hře menší odpor.

Další důležitou součástí klavíru jsou pedály, které hráč sešlapuje nohama. Pedály jsou většinou dva. Sešlápnutím pravého pedálu vyřadíme z provozu soustavu dusítek a to znamená, že tón bude znít dál i po uvolnění klávesy do té doby, než se struna sama utlumí nebo než uvolníme pedál. Sešlápnutím levého pedálu (tzv. *una corda*) se klávesnice a tím i celý kladívkový mechanismus posune o 3-6 mm doprava, což způsobí, že kladívko, které předtím dopadalo na dvě, tři nebo čtyři struny, nyní zasáhne jenom jednu nebo dvě, a tím se tón zeslabí.

Barvu tónů klavíru můžeme ovlivnit pomocí pedálů, ale hlavně tím, jak silně stiskneme klávesu. Čím silnější je úhoz, tím rychleji se kladívko pohybuje a dodá struně tím vyšší energii. Ale také se tím intenzivněji ozývají vyšší harmonické tóny. Barva tónu klavíru závisí nepatrně také na tom, zda je horní deska klavíru uzavřena nebo otevřena nebo zcela odstraněna. Klavír patří k nástrojům s velkými dynamickými možnostmi. Nejnižší hladina intenzity, které klavír dosahuje (s použitím levého pedálu), je 44 dB, nejvyšší hladina intenzity je asi 80 až 89 dB. Nejvyšších amplitud dosahují tóny klavíru při otevřené horní desce, nakloněné směrem k posluchačům. Vzhledem ke tvaru horní desky se často říká klavíru také „křídlo“.

Dalším kladívkovým nástrojem, velmi podobným klavíru, je **pianino**. Pianino má menší rezonanční skříň než klavír a jeho horní deska není odklápěcí. Jeho struny se na rozdíl od klavíru napínají na rám ve svislé poloze, nikoliv vodorovné. Protože i kladívková mechanika je umístěna svisle, je účinnost úhozu menší než u klavíru. Díky menším rozměrům a menší hmotnosti rezonanční skříně je také vyzařovaná akustická energie menší. Pianino má stejně jako klavír pravý a levý pedál a navíc obsahuje tzv. moderátor – třetí prostřední pedál. Po jeho sešlápnutí se mezi struny a kladívka vsune lišta s plstěnými vložkami. Při úderu kladívka na strunu přes plstěnou vložku se intenzita tónu značně ztlumí, vyšší harmonické zanikají a tón je tichý a měkký.

Cimbál je mnohostrunný nástroj, jehož struny hráč rozechvívá údery dřevěných paliček. Rezonanční skříňka cimbálu má symetrický lichoběžníkový tvar a je vyrobena ze smrkového a javorového dřeva. V její horní desce bývají dva nebo tři kruhové zvukové otvory. Nad horní deskou cimbálu jsou nataženy ocelové struny (rovnoběžně se základnami lichoběžníku). Rezonanční skříňka má poměrně malé rozměry, proto se intenzita tónů vydávaných strunami podobně jako u klavíru zvyšuje tak, že pro každý jednotlivý tón neobsahuje cimbál jednu nýbrž tři až sedm stejných strun. Kontakt strun s rezonanční skříňkou zprostředkovávají dvě dlouhé kobylky, které mají v sobě malé kruhové otvory. Některé struny pak mohou být nataženy přes jednu nebo obě kobylky a

některé prochází kruhovými otvory v kobylce. Kobylky mají u cimbálu také ten význam, že předělují strunu na více částí různých délek a na všechny tyto části struny je možné hrát (na rozdíl např. od smyčcových nástrojů, kde rozkmitáváme strunu jen na jedné straně od kobylky). Dřevěné paličky, kterými rozezníváme struny cimbálu, bývají obalené vatou nebo plstí, aby se utlumily vyšší harmonické tóny (podobně jako kladívka klavíru), a tóny mají pak příjemné měkké zabarvení.

3.1.6. Smyčcové nástroje

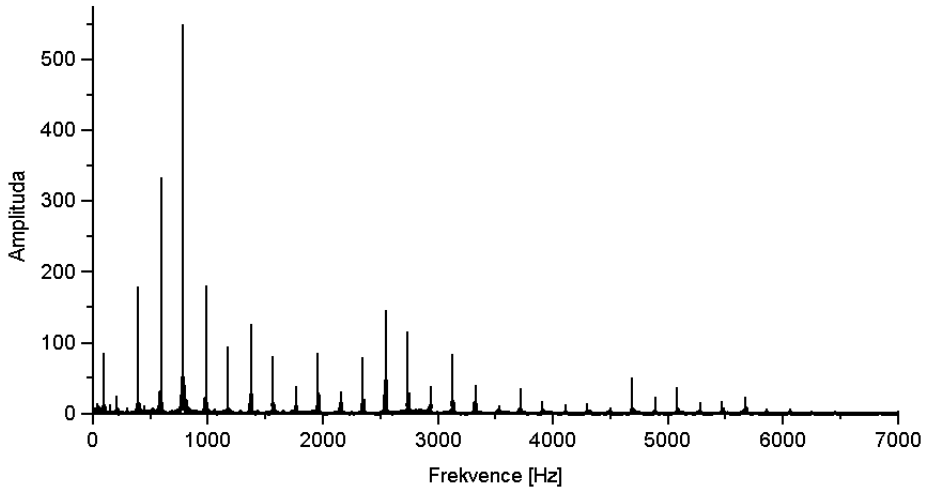
Do skupiny dnes běžně užívaných smyčcových nástrojů můžeme zařadit housle, violu, violoncello a kontrabas. U těchto nástrojů vzniká tón tahem smyčce po struně. Podstatný rozdíl mezi smyčcovými a ostatními strunnými nástroji je v tom, že při tření struny smyčcem vznikají netlumené kmity, zatímco při rozkmitání struny drnknutím nebo úhozem vznikají kmity tlumené. Vznikem tónu při rozechvívání struny smyčcem se zabýval Hermann Helmholtz a zjistil, že hra smyčcem se skládá ze dvou fází. V první fázi se struna pohybuje zároveň se smyčcem, v druhé fázi se pohybuje proti směru pohybu smyčce a tyto dvě fáze se stále opakují. Na začátku přiložíme smyčec na strunu a táhneme jím ve směru kolmém ke struně, tak že se struna pohybuje spolu se smyčcem. V bodě dotyku smyčce a struny působí na strunu tlaková síla smyčce F_N a tahová síla smyčce F_T, působící ve směru pohybu. Ta při tahu smyčcem vyvolá sílu statického tření F_{ST}, která působí v tomtéž bodě proti směru pohybu. Smyčec táhne strunu silou $-F_{ST}$. Struna se tak vychyluje ze své rovnovážné polohy a působí na ni tedy síla pružnosti F_P, která je úměrná výchylce struny a působí proti směru pohybu. Struna a smyčec se vůči sobě vzájemně nepohybují, musí tedy v bodě dotyku smyčce a struny platit dynamická rovnováha. To znamená, že síla statického tření F_{ST} bude v každém okamžiku rovna síle pružnosti F_P. Maximální možná hodnota, které může statická třecí síla dosáhnout, je $F_{ST} = f \cdot F_N$, kde f je koeficient statického tření.V okamžiku, kdy velikost pružné síly F_P převýší tuto maximální hodnotu, mění se statické tření na tření dynamické. Síla dynamického tření je však menší než statická třecí síla. Proto se struna se začne pohybovat na opačnou stranu a překmitne svoji rovnovážnou polohu. Síla dynamického tření působí opět proti směru pohybu struny, tentokrát ovšem ve směru

pohybu smyčce. Jakmile se dynamické tření vyrovná se silou pružnosti struny, struna se vzhledem k okolí zastaví, ale vzhledem ke smyčci se bude zpomalovat. Ve chvíli, kdy se struna vzhledem ke smyčci zastaví, bude se zrovna pohybovat stejnou rychlostí jako smyčec, dynamické tření se změní zpět na tření statické a děj se opakuje. Hlasitost tónu můžeme ovlivnit změnou tlakové síly smyčce, protože čím je větší tlaková síla, tím větší je statické tření a tím větší výchylka na struně vznikne. Pomocí smyčce můžeme ovlivnit také barvu tónu, protože barva závisí na místě, v kterém se smyčec struny dotýká. Podobně jako u rozechvění struny úderem kladívka se utlumí ty harmonické tóny, které mají uzel v místě dotyku smyčce a struny nebo v jeho těsné blízkosti. Většinou se smyčec dotýká struny v její devítině nebo desetině (měřeno od kobylky). Pokud hrajeme smyčcem těsně u kobylky, vyšší harmonické tóny se ozývají v plné síle a tón má kovový zvuk. Když se smyčcem pohybujeme dále od kobylky, vyšší harmonické tóny znějí méně silně a zvuk má jemnější charakter. Helmholtz také ukázal, že intenzita jednotlivých harmonických tónů je při hře smyčcem vždy v poměru $1:\frac{1}{4}:\frac{1}{9}:\frac{1}{16}...:\frac{1}{k^2}$, kde k je pořadové číslo harmonického tónu. Je také důležité, aby se smyčec pohyboval přesně kolmo ke struně, protože tah smyčce jiným směrem vzbuzuje podélné chvění, které se ve výsledném zvuku projevuje skřípáním. Největší vliv na barvu tónu má samotná rezonanční skříňka, která má díky svému tvaru velký počet vlastních frekvencí, které se rezonancí zesilují. Všechny smyčcové nástroje se kromě svých základních velikostí vyrábí také ve zmenšených velikostech v určitém poměru. Ovšem tímto zmenšením se zhoršují rezonanční vlastnosti nástroje. Nejlépe tak zní nástroj ve své základní největší velikosti.

Housle jsou nejmenším smyčcovým strunným nástrojem. Skládají se z rezonanční skříňky specifického oblého tvaru, která bývá vyrobena nejčastěji ze smrkového nebo jedlového dřeva. Její délka je asi 36 cm a na ni navazuje úzký krk 24 cm dlouhý s ebenovým hmatníkem bez pražců ukončený hlavicí. Rezonanční skříňka se skládá ze dvou klenutých desek spojených luby. Luby i desky jsou po stranách vykrojeny ve tvaru písmene C a v horní i dolní části jsou polokruhovitě zaobleny. V horní desce jsou symetricky umístěny dva výřezy ve tvaru písmene *f,* které slouží jako rezonanční otvory. Mezi těmito výřezy je na horní desce volně umístěna kobylka, která pevně přiléhá na rezonanční skříňku napětím strun jdoucích přes ni, a tvoří tak těsnou mechanickou vazbu mezi strunami a rezonanční deskou. Uvnitř houslí se nachází rohové sloupky, které slouží jako podpěry lubů, dále rezonanci podporující basový

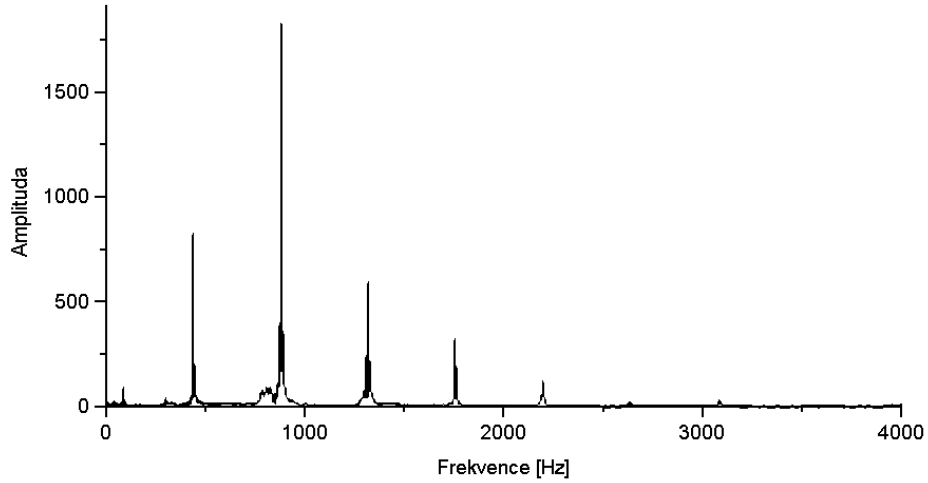
trámec a konečně podpěrný kolík, tzv. duše, která podpírá rezonanční desky v oblasti pod kobylkou. Basový trámec je přilepen k horní rezonanční desce ve směru strun, avšak asymetricky, neprochází osou rezonanční desky. Má pouze rezonanční funkci.

Obr. 1.6. Fourierova analýza struny houslí rozezněné smyčcem



Duše je umístěna volně, opět asymetricky, na opačné straně než basový trámec a drží pouze tlakem rezonančních desek. Přesné umístění duše může také ovlivnit barvu zvuku. V dolní části lubů je uchycen struník (plastový nebo dřevěný trámec), který

Obr. 1.7. Fourierova analýza struny houslí rozezněné drnknutím



zasahuje asi do třetiny délky rezonanční skříňky, ale není v kontaktu s rezonanční deskou. Z jeho konce vychází čtyři kovové struny, které vedou přes kobylku, přes hmatník až k ladicím kolíčkům v hlavici houslí. Struny jsou laděné v kvintách na tóny

g, d_1, a_1, e_2. Housle spočívají při hře na levém rameni, k němuž je pevně tiskneme bradou. Prsty levé ruky zkracují struny na hmatníku. Smyčcem, který držíme v pravé ruce, táhneme kolmo přes strunu.

Viola je smyčcový nástroj velmi podobný houslím. Má struny naladěné o kvintu níž než housle, tedy na tóny c, g, d_1, a_1. Přitom je však rezonanční skříňka violy jen o 3 - 4 cm delší. Už roku 1819 francouzský fyzik Felix Savart správně tvrdil, že vzduchový prostor uvnitř violy by měl být přizpůsoben jejímu tónovému rozsahu. Protože tomu tak není, tón violy zní vzhledem k tónu houslí slaběji a syrověji. Jinak má viola stejnou stavbu jako housle a hrajeme na ni stejným způsobem jako na housle.

Violoncello je opět smyčcový nástroj svou stavbou velmi podobný houslím. Liší se však značně svou velikostí, a proto také způsobem hry. Rezonanční skříňka violoncella je asi 70 cm dlouhá a velikost krku je přizpůsobena tak, aby celková délka strun byla 69 cm. Při takové velikosti nástroje již není možné mít nástroj při hře opřený na rameni. Proto je violoncello ve spodní části lubů opatřeno kovovým bodcem, kterým se nástroj při hře opírá o zem. Zároveň hráč drží violoncello sevřené mezi koleny. Levou rukou pak už stejně jako u houslí tiskne struny k hmatníku a zkracuje tak jejich délku a pravou rukou táhne smyčcem přes struny. Struny violoncella jsou naladěny o oktávu níž než viola, tedy na tóny C, G, d, a. Stejně jako u violy ani u violoncella neodpovídá velikost rezonanční skříně tónovému rozsahu tak, jak je tomu u houslí. Přesto však je tón violoncella mnohem výraznější než tón violy, i když ne tak výrazný jako tón houslí.

Kontrabas je nejhlubším a největším smyčcovým nástrojem. Délka jeho rezonanční skříňky je 116 cm a jeho celková délka asi 190 cm. Od předchozích smyčcových nástrojů se kromě velikosti mírně liší také svým tvarem. Jednak jeho dolní rezonanční deska není vyklenutá, ale je téměř rovná a plochá, v horní části mírně skloněná. Dále v horní části není rezonanční skříňka kruhovitě zaoblená, ale je prodloužená, směřující ke krku. U některých nástrojů se liší také tvar zvukových otvorů v horní rezonanční desce. Kontrabas má stejně jako violoncello bodec, kterým se při hře opírá o zem. Hráč při hře buď stojí nebo sedí na vysoké židli, levou rukou zkracuje struny na hmatníku a pravou hraje smyčcem. Je však velmi častá i jiná technika hry, totiž že hráč pravou rukou rozechvívá strunu pouhým drnknutím bez použití smyčce. Tato technika hry nazvaná *pizzicato* se používá i u předchozích smyčcových nástrojů. Použití této techniky u kontrabasu je obzvláště účinné ve spojení s bicími nástroji a má tak funkci rytmického nástroje. Kontrabas má struny naladěné na tóny E_1, A_1, D, G.

Dynamické možnosti jsou u všech zmíněných smyčcových nástrojů přibližně stejné. Dolní hladina intenzity byla naměřena asi 42 dB, horní hladina intenzity 73 dB. Průměrné dynamické rozpětí je tedy asi 30 dB, jen u violy je nepatrně nižší.

3.2. Idiofony

3.2.1. Rozdělení idiofonů

Idiofony jsou hudební nástroje, u kterých zvuk vzniká kmitáním pružných tyčí a desek. Na rozdíl od strun, které konají příčné kmity, kmitavý pohyb tyčí a desek je poněkud složitější, konají tzv. ohybové kmity, které mají charakter příčné i podélné vlny. Při těchto kmitech mění tyče a desky i jako celek periodicky svou polohu. U tyčí kmitají jednotlivé částice kolmo ke směru podélné osy, tedy příčně, u desek pak kolmo k rovině desky.

3.2.2. Kmity tyče

Podívejme se nejprve na kmity tyče. V tyčích je rychlost postupné ohybové vlny dána vztahem

$$c' = \frac{2\pi\kappa}{\lambda}\sqrt{\frac{E}{\rho}}, \tag{2.1}$$

kde λ je délka ohybové vlny, která se tyčí šíří, κ je tzv. poloměr setrvačnosti průřezu tyče S (neboli tyče o nekonečně malé délce ΔL), E je Youngův modul pružnosti materiálu tyče a ρ jeho hustota. Poloměr setrvačnosti průřezu tyče κ vyjadřuje poloměr obruče, která má stejnou hodnotu momentu setrvačnosti J a hmotnosti m jako průřez tyče. Moment setrvačnosti obruče je dán vztahem $J = mr^2$, kde r je její poloměr a m její hmotnost. Moment setrvačnosti průřezu tyče jakéhokoliv tvaru je pak $J = m\kappa^2$ a počítáme ho vzhledem k ose otáčení, která je kolmá k podélné ose tyče, ke směru pohybu částic tyče a prochází těžištěm průřezu tyče. Při kmitech tyče se její jednotlivé úseky otáčejí právě kolem této osy. a tedy poloměr setrvačnosti průřezu tyče můžeme vyjádřit vztahem

$$\kappa = \sqrt{\frac{J}{m}}. \tag{2.2}$$

V dalším textu budeme podrobněji rozebírat tyče kruhového a obdélníkového průřezu.

Odvodíme vztah pro poloměr setrvačnosti obdélníkového průřezu. Nechť náš obdélníkový průřez tyče má tloušťku *a*, šířku *b* a velmi malou délku ΔL. Moment setrvačnosti budeme počítat vzhledem k ose procházející středem obdélníku a zároveň středem strany *b,* tedy bude mí směr hrany *a* obdélníku. Pro moment setrvačnosti elementu obdélníku o rozměrech $a \times dx$ a hmotnosti d*m* ve vzdálenosti *x* od osy platí vztah

$$dJ = x^2 dm .$$

Protože hmotnost *dm* můžeme rozepsat jako $\rho \cdot dV$ neboli $\rho \cdot a \cdot dx \cdot \Delta L$, vychází tak pro dJ vztah

$$dJ = \rho \cdot \Delta L \cdot a \cdot x^2 dx .$$

Moment setrvačnosti celého obdélníku pak dostaneme následujícím integrováním:

$$J = 2 \cdot \int_0^{\frac{b}{2}} \rho \cdot \Delta L \cdot a \cdot x^2 dx = 2\rho \cdot \Delta L \cdot a \cdot \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^{\frac{b}{2}} = \frac{\rho \cdot \Delta L \cdot a \cdot b^3}{12} .$$

Hmotnost obdélníkové tyče o velmi malé délce ΔL vyjádříme vztahem:

$$m = \rho \cdot V = \rho \cdot a \cdot b \cdot \Delta L .$$

Nyní již můžeme dosadit do vztahu (2.2) a pro poloměr setrvačnosti obdélníkového průřezu nám vychází vztah

$$\kappa = \frac{b}{2\sqrt{3}} .$$

Poloměr setrvačnosti kruhového průřezu tyče bychom odvodili analogicky.

Poloměr setrvačnosti kruhového (resp. obdélníkového) průřezu vypočítáme z následujícího vztahu (2.3) (resp. (2.4)):

$$\kappa = \frac{r}{2} \tag{2.3}$$

$$\kappa = \frac{b}{2\sqrt{3}} . \tag{2.4}$$

Protože rychlost postupné podélné vlny v tyči je určena vztahem

$$c_0 = \sqrt{\frac{E}{\rho}} , \tag{2.5}$$

můžeme vztah (2.1) přepsat do tvaru.

$$c' = \frac{2\pi \cdot c_0 \cdot \kappa}{\lambda}. \tag{2.6}$$

Je-li tyč válcového tvaru s kruhovým průřezem o poloměru r , dostaneme po dosazení ze vztahu (2.3) :

$$c' = \frac{\pi \cdot r \cdot c_0}{\lambda} \tag{2.7}$$

Pro tyč obdélníkového průřezu s tloušťkou a a šířkou b se po dosazení ze vztahu (2.4) vztah (2.6) zjednoduší na:

$$c' = \frac{\pi b c_0}{\lambda\sqrt{3}} \ . \tag{2.8}$$

Frekvenci základního tónu určíme ze vztahu

$$f_1 = \frac{c'}{\lambda_1}. \tag{2.9}$$

Vlnová délka λ_1 je u tyče podobně jako u struny úměrná její délce, tedy $\lambda_1 = m_1 \cdot l$, kde l je délka tyče a m_1 zatím blíže neurčená konstanta. Ze vztahů (2.7) a (2.8) tak dostáváme pro základní frekvenci u válcové tyče vztah

$$f_1 = \frac{\pi \cdot r \cdot c_0}{m_1^2 \cdot l^2} \tag{2.10}$$

a u tyče obdélníkového průřezu vztah

$$f_1 = \frac{\pi \cdot b \cdot c_0}{m_1^2 \cdot l^2 \sqrt{3}}. \tag{2.11}$$

Pro k-tý částkový tón se obvykle píše konstanta m_k ve tvaru $\frac{2\pi}{p_k}$. Potom pro k-tý částkový tón platí vztah u válcové tyče

$$f_k = p_k^2 \frac{r \cdot c_0}{4\pi \cdot l^2} \tag{2.12}$$

a u tyče s obdélníkovým průřezem

$$f_k = p_k^2 \frac{b \cdot c_0}{4\pi \cdot l^2 \sqrt{3}}. \tag{2.13}$$

Součinitelé p_k se určí řešením transcendentní rovnice

$$\frac{e^{p_k} + e^{-p_k}}{2} \cdot \cos p_k = \pm 1, \tag{2.14}$$

neboli $\cosh p_k \cdot \cos p_k = \pm 1$. O tom, zda je na pravé straně rovnice 1 nebo –1, rozhoduje způsob upevnění tyče.

3.2.3. Tvoření tónů na tyči a rozložení uzlových bodů při určitém upevnění tyče

Ze vztahů (2.12) a (2.13) je vidět, že frekvence tónu vydávaného chvěním tyče závisí nepřímo úměrně na druhé mocnině délky tyče. Zkrátíme-li tedy tyč na polovinu původní délky, bude vydávat čtyřikrát vyšší základní tón, tzn. bude znít o dvě oktávy výš. Tato závislost je pro kmity tyčí charakteristická a můžeme zde vidět, jak se odlišují od kmitů struny, kde základní frekvence závisí pouze na první mocnině délky. Dále je vidět, že frekvence kmitů tyče závisí také na materiálu, z kterého je tyč vyrobena, a na tvaru a rozměrech jejího průřezu.

Nyní se podíváme, jak budou vypadat frekvence pro částkové tóny při různých upevněních tyče. Rozebereme 3 následující případy a to: tyč úplně volnou, tyč na jednom konci upevněnou a tyč na obou koncích podepřenou.

Pro tyč úplně volnou má rovnice (2.14) tvar

$$\cosh p_k \cdot \cos p_k = 1$$

a její řešení budou následující:

$$p_1 = 3 \cdot \frac{\pi}{2} + 0{,}0176518 = 4{,}7300408$$

$$p_2 = 5 \cdot \frac{\pi}{2} - 0.0007770 = 7.8532046$$

$$p_3 = 7 \cdot \frac{\pi}{2} + 0{,}0000336 = 10{,}9956078$$

$$p_4 = 9 \cdot \frac{\pi}{2} - 0{,}0000014 = 14{,}1371655$$

$$p_5 = 11 \cdot \frac{\pi}{2} = 17{,}2787595$$

$$p_k \to (2k+1)\frac{\pi}{2} \tag{2.15}$$

Vidíme, že hodnoty čísel p_k se pohybují kolem lichých násobků $\frac{\pi}{2}$ a se zvyšujícím k se jejich hodnota přibližuje ke vztahu (2.15). Pro vyšší částkové tóny můžeme jejich frekvence vyjádřit vztahem

$$f_k = (2k+1)^2 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\kappa \cdot c_0}{4l^2}, \tag{2.16}$$

pro malé k se bude hodnota frekvence odchylovat. Vidíme, že vyšší částkové tóny nejsou harmonické vzhledem k základnímu tónu.

Jestliže sledujeme kmity tyče na jednom konci upevněné, rovnice (2.14) bude mít tvar

$$\cosh p_k \cdot \cos p_k = -1$$

a má následující řešení:

$$p_1 = \frac{\pi}{2} + 0{,}3043077 = 1{,}8751040$$

$$p_2 = 3 \cdot \frac{\pi}{2} - 0{,}0176518 = 4{,}6947372$$

$$p_3 = 5 \cdot \frac{\pi}{2} + 0{,}0007770 = 7{,}8547586$$

$$p_4 = 7 \cdot \frac{\pi}{2} - 0{,}0000336 = 10{,}9955407$$

$$p_5 = 9 \cdot \frac{\pi}{2} = 14{,}1371669$$

$$p_k \to (2k-1)\frac{\pi}{2} \tag{2.17}$$

Je vidět, že i v tomto případě hodnoty p_k oscilují kolem násobků $\frac{\pi}{2}$ a pro vyšší k je můžeme vyjádřit vztahem (2.17), pro malá k se budou jejich hodnoty od tohoto vyjádření lišit a odchylky se budou se zvyšujícím k zmenšovat. Frekvence vyšších částkových tónů tak můžeme přibližně vyjádřit vztahem

$$f_k = (2k-1)^2 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\kappa c_0}{4l^2} \tag{2.18}$$

a vidíme, že jsou opět neharmonické.

Pro kmity tyče upevněné na obou koncích má rovnice (2.14) tvar

$$\cosh p_k \cdot \cos p_k = 1,$$

a proto bude mít také stejná řešení a stejná vyjádření pro vyšší částkové tóny jako tyč úplně volná a budou pro ni platit vztahy (2.15) a (2.16). Musíme však rozlišit, zda je tyč na obou koncích skutečně pevně upevněna, nebo zda je na obou koncích pouze podepřena. V prvním případě se totiž v místě uchycení tyč nemůže pohybovat nahoru ani dolů, ani se natáčet, v druhém případě se však v místě podepření brání v pohybu

tyče pouze v jednom směru. Frekvence částkových tónů lze v tomto druhém případě určit ze vztahu

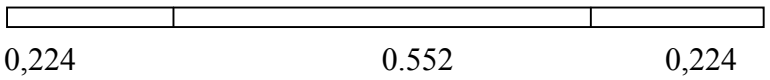
$$f_k = k^2 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\kappa c_0}{l^2} \tag{2.19}$$

a relativní výšky částkových tónů jsou pak dány čísly 1, 4, 9, 16, …., k^2.

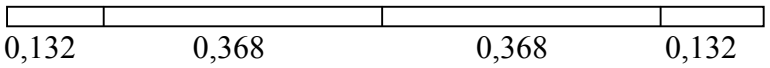
To, že jsou vyšší částkové tóny u tyčí neharmonické vzhledem k základnímu tónu i vůči sobě navzájem, je další důležitá vlastnost, ve které se odlišují tyče od strun a je způsobena tuhostí tyče. U příčných kmitů struny vznikají vyšší částkové tóny, které jsou harmonické vzhledem k základnímu tónu a při vyšším harmonickém tónu *k*-tého řádu je struna rozdělena $(k-1)$ uzly na *k* půlvln. Pro dané *k* jsou rozestupy mezi uzly vždy stejné a to $\frac{L}{k}$, kde *L* je délka struny. Také u kmitů tyče se budou tvořit uzly. Pravidelně rozmístěné však budou pouze v posledním zmiňovaném případě, kdy je tyč na obou koncích podepřená a rozestupy mezi uzly budou rovněž $\frac{l}{k}$. V ostatních případech, tedy pro tyč upevněnou na jednom nebo obou koncích, nebo tyč úplně volnou, se na tyči při kmitání také tvoří uzly, ale pro každý z uvedených případů je jejich počet dán jiným vztahem a hlavně se pro dané *k* liší rozestupy mezi jednotlivými uzly. Experimentálně můžeme zjistit polohu uzlů např. tak, že na tyč nasadíme na různá místa papírové jezdce ve tvaru Λ a po rozkmitání tyče uvidíme, že jezdce zůstanou právě v místech uzlových bodů jejích základních módů, na ostatních částech tyče se neudrží. Rozmístěním uzlů na chvějící se tyči se zabýval L. Seebeck a pro zmiňované případy polohy uzlů teoreticky odvodil.

Pro tyč úplně volnou bude rozložení uzlů podle Seebeka vypadat následovně:

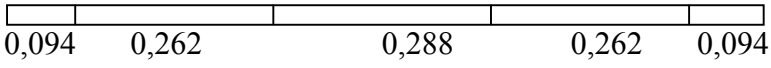
k=1



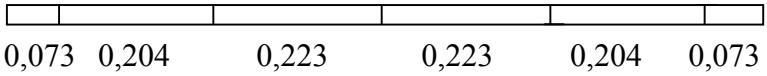
k=2



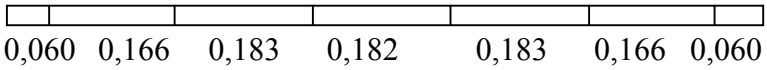
k=3



k=4



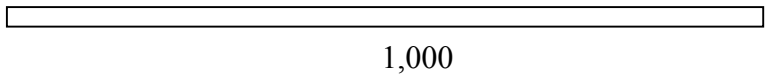
k=5



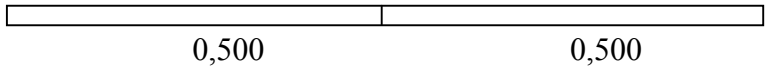
Čísla pod úseky tyčí na obrázku znamenají vzdálenost mezi uzly, pokud uvažujeme jednotkovou délku tyče. Rozestupy mezi uzly skutečně nejsou stejné, ale je vidět, že uzly jsou rozloženy symetricky od středu tyče. Se zvyšujícím se *k* se „délka meziuzlí“ *u* blíží k hodnotě $u = \frac{2l}{2k+1}$. Při experimentování s tyčí úplně volnou, případně při výrobě hudebního nástroje založeného na principu chvění tyče, je dobré tyč podepřít nebo uchytit právě v uzlových bodech tyče. Podepřeme-li tyč v jiném místě, budou se kmity tyče velmi rychle tlumit.

Pro tyč upevněnou na obou koncích bude rozložení uzlů vypadat takto:

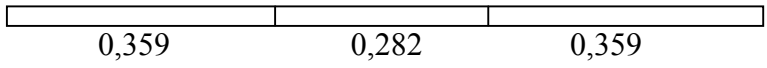
k=1



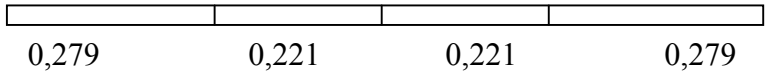
k=2



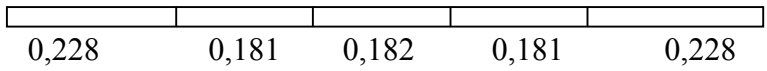
k=3



k=4

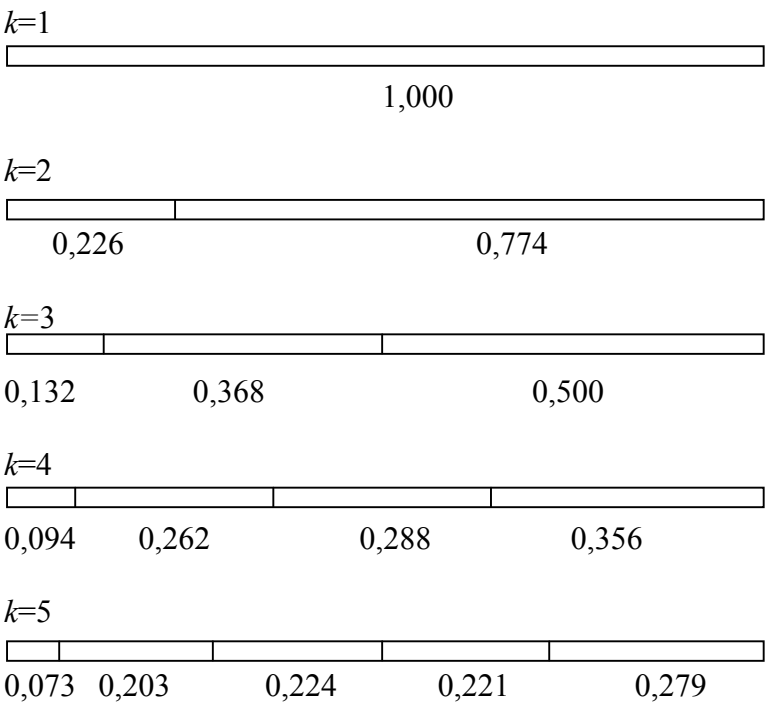


k=5



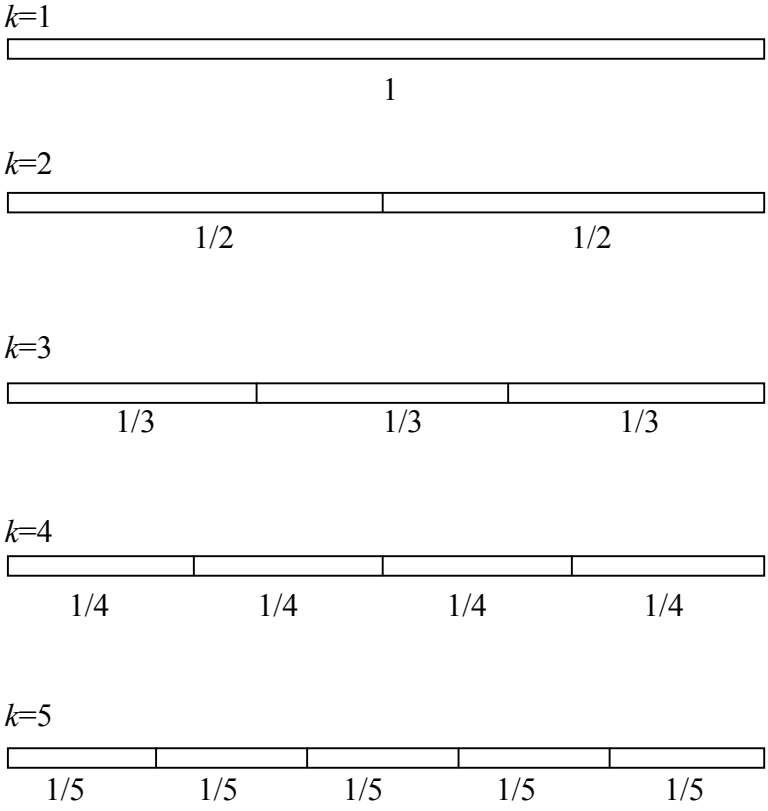
Opět se rozestupy uzlů pro jednotlivá k liší a i tentokrát jsou uzly rozloženy symetricky podle středu. V tomto případě se při vyšších k délka meziuzlí bude blížit hodnotě $u = \frac{2l}{2k+1}$.

Pro tyč na jednom konci upevněnou budou uzly rozmístěny takto:



Na obrázku vidíme rozložení uzlů na tyči upevněné na jejím pravém konci. Opět se rozestupy mezi uzly liší, ale tentokrát navíc ani uzly nejsou symetricky rozloženy, protože ani tyč není symetricky uchycena. Pro vysoká k se délka meziuzlí blíží k hodnotě $u = \frac{2l}{2k-1}$.

Jak už bylo řečeno, jediný případ, kdy jsou uzly rozmístěny nejen symetricky, ale také rovnoměrně v pravidelných rozestupech (stejně jako u strun), je tyč na obou koncích pouze podepřená.



3.2.4. Hudební nástroje založené na kmitech tyčí

Mezi nejznámější nástroje založené na kmitech tyčí patří xylofon, metalofon, vibrafon, celesta a triangl.

Xylofon je sada dřevěných tyčí z javorového, smrkového nebo ořechového dřeva, obdélníkového průřezu.Tyče mohou mít různou délku a různou tloušťku. Jsou navlečeny na bavlněné šňůry nebo na struny a volně položeny na slaměné provazce nebo na dřevěné pražce, které se podkládají pod tyče v místech jejich uzlových bodů. Tyče jsou poskládány v jedné až čtyřech řadách do tvaru lichoběžníka a jsou umístěny v dřevěné krabici, která po odklopení víka může sloužit jako rezonátor nástroje. Tyče rozechvíváme dvěma dřevěnými paličkami. Nejmodernější xylofony mají pod každou tyčí umístěn dutý válcový rezonátor o stejné vlastní frekvenci jako daná tyč a vzduchový sloupec v rezonátoru uzavřený tak zesiluje zvuk samotné tyče.

Metalofon je nástroj velmi podobný xylofonu a funguje na stejném principu, jen rozechvívané tyče nejsou dřevěné, ale kovové.

Podobným nástrojem je také **zvonková hra**. Zvonky jsou nahrazeny kovovými destičkami nebo tyčinkami různých velikostí, které jsou opět podloženy a volně upevněny na dřevěných trámcích. Jsou rozechvívány úhozem kladívek pomocí klávesnice.

Dalším nástrojem založeným na podobném principu je **vibrafon**. Podstatu vibrafonu tvoří kovové plátky různé délky, které jsou ve dvou řadách seřazeny vedle sebe (podobně jako klaviatura), a rozechvívají se úderem paliček potažených plstí. Pod každým plátkem je volně připevněna kovová rourka(rezonátor), která má podobně jako u xylofonu zesílit kmity kovového plátku. Na konci obráceném k plátku je každá rourka opatřena pohyblivým víčkem. Víčka jsou vždy v jedné řadě připojena ke společné ose. Otáčením osy se všechna víčka zároveň překlápějí a tím uzavírají a otevírají otvor rourky zvukovým vlnám vzbuzeným rozechvěním plátku. Otáčení os se děje prostřednictvím pérového nebo elektrického motorku, který se spouští pedálem nebo páčkou. Otáčením víček se dosáhne střídavého zesilování a zeslabování tónu (dynamické vibrace = odtud název vibrafon).

Marimbafon je xylofonový nástroj černošského původu. Pod jeho dřevěnými destičkami byly tykvové rezonátory. Moderní marimbafon má pod dřevěnými destičkami kovové rezonátory jako vibrafon, ale bez pohyblivých víček.

Celesta je klávesový nástroj používaný v orchestru. Svým vzhledem připomíná malé pianino nebo harmonium. Zdrojem tónů jsou ocelové tyče rozechvívané úhozem oplstěného kladívka, podobně jako struny u klavíru. Základní tóny tyčí se zde zesilují dřevěnými rezonančními skříňkami, vyšší neharmonické tóny se utlumí a tón má jasný, měkký charakter. Kladívka se uvádí do pohybu opět pomocí klaviatury. Celesta má jeden pedál. Má stejnou funkci a funguje na stejném principu jako pravý klavírní pedál.

Triangl je tyčinka z tzv. stříbrné oceli, zahnutá do tvaru rovnostranného trojúhelníka (o straně až 35 cm). Zavěšuje se volně na motouz nebo na strunu a rozechvívá se tenkou ocelovou tyčinkou. Vydává vysoký tón neurčité výšky.

3.2.5. Kmity desek

Nyní přejdeme ke kmitům desek. Zatímco struna nebo tyč jsou lineárními zářiči akustické energie, deska představuje rovinný zářič, protože dva její rozměry převažují nad rozměrem třetím. Deska podobně jako tyč nekmitá pouze příčně, ale koná složité

ohybové kmity. Na rozdíl od tyče se však její pohyb skládá z ohybových kmitů ve dvou na sebe kolmých směrech, a proto je ještě o mnoho složitější než kmity tyče. Kmity desek se zabýval na počátku 19. století Arnošt Florens Chladni. Pro základní frekvenci kmitů desky odvodil vztah:

$$f = konst \cdot \frac{d}{S}\sqrt{\frac{E}{\rho}}, \tag{2.20}$$

kde d je tloušťka desky, S je její povrch, E je Youngův modul pružnosti materiálu desky a ρ jeho hustota. Tento vztah platí jak pro desky obdélníkové, tak i pro desky kruhové, liší se však hodnotou konstanty.

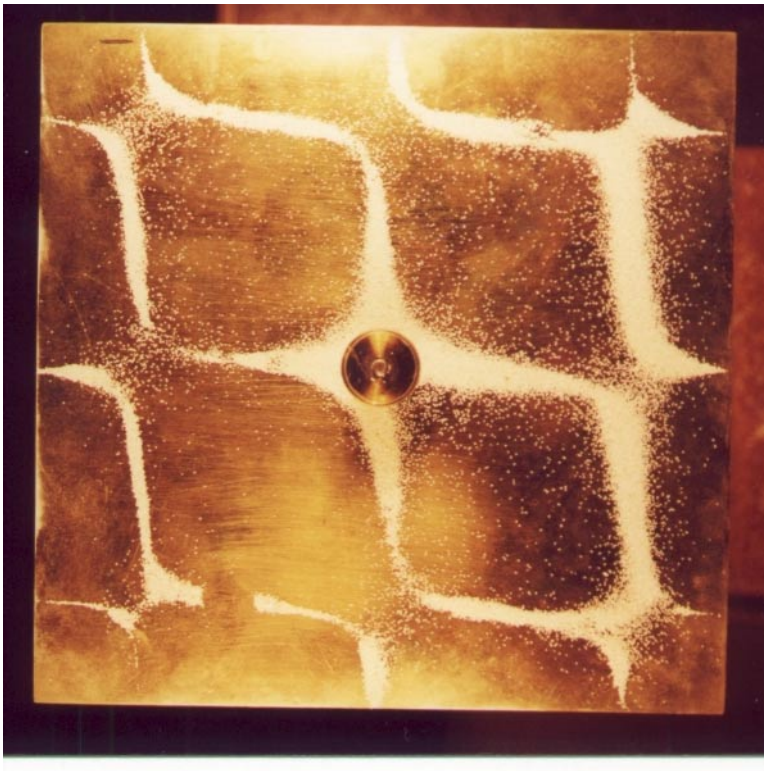
3.2.6. Tvoření tónů na deskách a rozložení uzlových čar

Kromě základního tónu vydávají desky velký počet vyšších částkových tónů, které jsou k základnímu tónu neharmonické. Podobně jako u tyčí, kde každému částkovému tónu odpovídalo určité rozložení uzlových bodů, je i u desky rozložení uzlů charakteristické pro daný tón. Protože však deska nekmitá v jednom ale ve dvou směrech, budou se namísto uzlových bodů tvořit na desce uzlové čáry. Chladni zkoumal polohu uzlových čar na desce tak, že povrch desky lehce posypal mořským pískem a při chvění desky se písek usazoval právě v oblasti uzlových čar, zatímco na jiných místech se neudržel. Zobrazení uzlových čar na desce pro různé tóny nazýváme Chladniho obrazce (obrázky 2.1.- 2.6.) Rozložením uzlových čar se zabýval také Felix Savart, ovšem k zobrazení čar nepoužil písek, ale jemný lehký prášek, jako jsou např. plavuňové výtrusy. Po rozechvění desky se prášek nepřemísťoval na místa uzlových čar, která jsou v klidu, ale začal vykonávat vířivý pohyb ve vzduchu právě nad místy, kde se deska při chvění nejvíce vychyluje ze své rovnovážné polohy. Když se pak pohyb desky náhle rychle utlumil, prášek klesl zpět na desku právě do těchto oblastí, nad kterými předtím vířil, a vyplnil tak na desce místa kmiten. Takové zobrazení uzlových čar nazýváme Savartovy obrazce. Můžeme říct, že Chladniho a Savartovy obrazce pro určitý tón jsou vůči sobě navzájem inverzní. Jiná metoda pozorování kmitů desky je ta, že desku před rozkmitáním pokryjeme vrstvou kapaliny a po rozkmitání můžeme pozorovat pohyb částeček kapaliny. Vzniklé obrazce nazýváme Faradayovy.

Obr. 2.1. Chladniho obrazec na kruhové desce

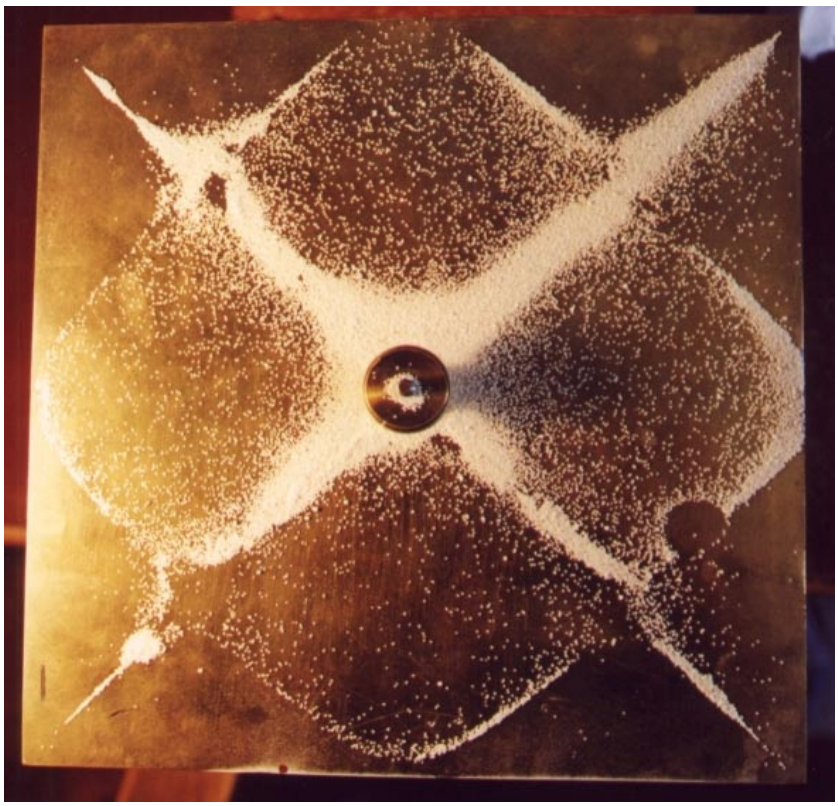
Obr. 2.2. Chladniho obrazec na kruhové desce

Obr. 2.3. Chladniho obrazec na čtvercové desce



Obr. 2.4. Chladniho obrazec na čtvercové desce

Obr. 2.5. Chladniho obrazec na čtvercové desce



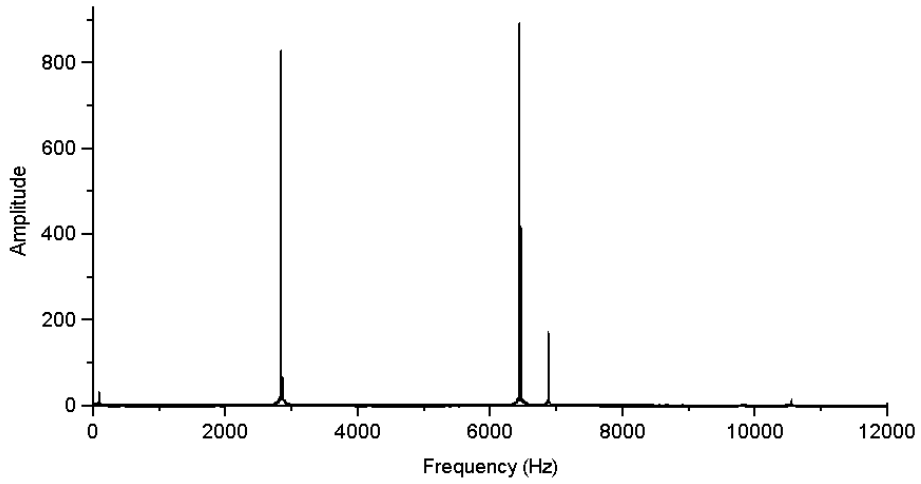
Obr. 2.6. Chladniho obrazec na čtvercové desce

Vyšší částkové tóny a tím i rozložení uzlových čar závisí na tvaru desky, na místě, kde je uchycena, a na místě a způsobu, kterým je rozechvívána. V místě uchycení desky bývá uzel, v místě, kde je deska rozechvívána, bývá naopak kmitna. Rozložení čar může být středově a osově symetrické podle středu a os symetrie desky. Např. u desek kruhového tvaru mohou vzniknout dva druhy uzlových čar: jednak soustředné kružnice – viz. obrázek 2.1. a jednak rovné čáry – paprsky, procházející středem kruhové desky – viz obrázek 2.2. Metodou Chladniho obrazců se často zkoumá kvalita rezonančních desek různých hudebních nástrojů, např. houslí.

3.2.7. Hudební nástroje založené na chvění desek

Zvony jsou vyklenuté kovové desky tvaru rotačního tělesa. Frekvence jejich základního tónu závisí nejen na hustotě a velikosti zvonu, ale i na jeho tvaru a kvalitě kovového materiálu (zvonoviny). Uzlové čáry na zvonu jsou analogické s uzlovými čarami na kruhové desce – místo čar soustředných a paprskovitých jsou zde čáry rovnoběžkové a poledníkové.

Obr. 2.7. Fourierova analýza mosazného zvonku



Geometricky získáme tyto čáry rovinnými řezy, vedenými jednak osou zvonu a jednak kolmo k ose. Kdyby tloušťka zvonu byla všude stejná, byla by relativní výška jeho částkových tónů v poměru 1, 4, 9, 16, …, k^2. Většinou se však tloušťka zvonu směrem

od vrcholu k obvodu značně zvětšuje. Přesto se však výrobci zvonů snaží docílit toho, aby alespoň počáteční částkové tóny byly harmonické. Někdy se stane, že hmota zvonu není kolem jeho osy stejnoměrně rozdělena a zvon pak může mít dva různé sobě blízké základní tóny.

Talíře nebo též **činely** je dvojice desek kruhového tvaru vyrobených ze slitiny mědi cínu, olova a železa. Ve svém středu jsou trochu vyhloubené a svým tvarem připomínají jen velmi mírně vyklenuté zvony. Průměr činelu bývá 35 až 55 cm. Ve středu činelu je malý otvor, kterým je provlečen kožený pásek. Při hře hráč drží činely za kožené pásky a udeří oběma činely o sebe v tečném směru, tedy nikoliv kolmo k ploše desek.Tím se dosáhne silného rozkmitání bodů zvláště u obvodu obou talířů. Úplně jinak bude znít činel, který rozkmitáme úderem oplstěné nebo dřevěné paličky. Všechny tyto techniky se v orchestru používají. V jazzovém orchestru se rozkmitávají činely také pomocí drátěné metličky.

Gong je velmi podobný činelu. Je to bronzová kruhová deska, tvarem připomíná velkou mísu se zahnutými okraji. Při hře je gong volně zavěšen na kovovém rámu a rozechvívá se úderem oplstěné paličky do středu nástroje. Jeho tón je naladěný na určitou výšku a zní podobně jako zvon.

Kastaněty jsou dvě malé dřevěné misky tvaru mušle. Jsou 3 až 6 cm široké, uvnitř mělce prohloubené a mají ploché okraje. Z jedné strany jsou k sobě vyčnívajícími oušky připoutány motouzem nebo stuhou. Při hře provlékneme palec stuhou a narážíme oběma miskami o sebe navzájem, a to vyhloubenými stranami k sobě. Kastaněty mají ostrý, klapavý zvuk. Někdy mohou být vyrobeny také z kosti nebo ze slonoviny. Tento nástroj je oblíbený ve Španělsku a v zemích latinské Ameriky a používá se jako doprovodný rytmický nástroj při tanci.

3.3. Membránofony

3.3.1. Kmity membrán

Membránofony jsou takové hudební nástroje, u nichž zvuk vzniká kmitáním blány nebo membrány. Podobně jako desky jsou membrány rovinnými zářiči akustické energie. Na rozdíl od desek však nemají vlastní pružnost, podobně jako struny. Pružnost dodáme membráně tak, že ji napneme po celém jejím obvodu např. na kovový rám. Membrány kmitají stejně jako struny příčně, avšak jejich pohyb se skládá z příčných kmitů ve dvou směrech, a proto je složitější než u strun. Výsledné kmity membrány budou jistě záviset na tvaru rámu, v němž je membrána napnuta. Pro naše potřeby bude stačit, když se omezíme na kruhové membrány, protože v hudebních nástrojích založených na principu kmitů membrán se jiný tvar nevyskytuje. Tvar struny kmitající na jediné frekvenci je dán funkcí sinus (viz obrázek 1.1.), podobně tvar kmitající kruhové membrány lze popsat pomocí tzv. Besselových funkcí, které jsou řešeními dvourozměrné vlnové rovnice v polárních souřadnicích. Tato řešení jsou natolik složitá, že je zde nebudeme uvádět. Jednotlivé kmitové módy membrány však můžeme zviditelnit stejně jako u desek pomocí Chladniho obrazců, i když uzlové čáry jsou při této metodě vidět méně zřetelně než u desek. Proto je k pozorování samotných kmitů výhodné použít např. mýdlovou blánu uchycenou v kruhové obruči. Díky svému vlastnímu povrchovému napětí je mýdlová blána pružná sama o sobě. Povrchové napětí kapalin je však mnohem menší, než napínací síla, kterou bývají napnuty běžné membrány např. na bubnech. Proto při kmitání dosahuje mýdlová blána větších amplitud a menších frekvencí, takže její pohyb můžeme snadno pozorovat pouhým okem. Co se týče uzlových čar, na kruhové membráně mohou vzniknout jen dva základní typy nebo jejich kombinace. První typ čar tvoří průměry kruhové membrány, které ji rozdělují na sudý počet stejných kruhových výsečí. Druhý typ tvoří soustředné kružnice. Každá kombinace prvního a druhého typu čar, která se na membráně vytvoří, odpovídá určitému vyššímu částkovému tónu. Vyšší částkové tóny jsou neharmonické vzhledem k základnímu tónu. Pokud je kruhová membrána po svém obvodu rovnoměrně napjatá, pro její základní frekvenci platí vztah:

$$f = \frac{konst}{d}\sqrt{\frac{p}{t \cdot \rho}}\,, \tag{3.1}$$

kde d je průměr blány, p je napětí membrány (napínací síla připadající na délkovou jednotku), t je tloušťka blány a ρ její hustota. Odtud vidíme, že vyšší tóny budou vydávat blány malé a tenké, zatímco pro hlubší tón musíme použít blánu velkou a tlustou. Barva tónu závisí jednak na tom, v kterém místě blánu rozkmitáme, a jednak také na způsobu rozkmitání (můžeme použít měkkou nebo tvrdou paličku).

3.3.2. Hudební nástroje založené na kmitech membrán

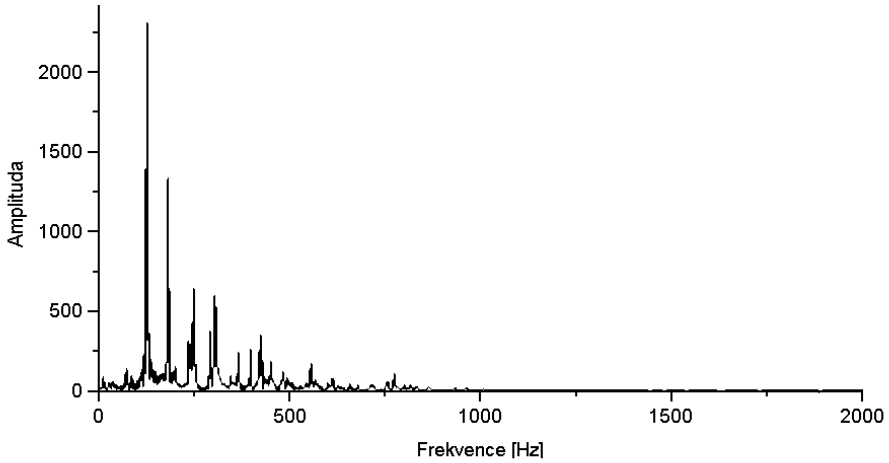
Tympány nebo též kotle jsou dvě měděné duté polokoule. Přes horní kruhový okraj tympánu je napjata blána z telecí kůže nebo nylonu, která je upevněna v kovovém prstenci. Průměr velkého tympánu pro hlubší tóny bývá 75 cm, průměr menšího pro vyšší tóny asi 68 cm, přičemž u obou je hloubka asi 48 cm. Ve spodní části měděného kotle je malý otvor pro vyrovnávání tlaku, aby uvnitř nedocházelo ke zpětným nárazům zhuštěného vzduchu a nenarušovaly se tak kmity membrány. K rozkmitání kůže tympánu se používají různé druhy paliček – s dřevěnou, korkovou nebo gumovou hlavicí, s hlavicí obalenou plstí, vatou nebo kůží, aj. Při použití měkké paličky se tolik nevybudí vyšší částkové tóny a ve zvuku převažuje základní tón. Kůže se paličkami rozechvívá přibližně ve čtvrtině průměru blány.Tympán můžeme ladit tak, že měníme napětí kůže pomocí šroubového nebo jiného mechanismu (moderní tympány se ladí pomocí pedálu).Tónový rozsah tympánů bývá obvykle v rozpětí kvinty.

Velký buben patří k bicím nástrojům s neurčitou tónovou výškou. Má tvar válce, u něhož obě podstavy tvoří kožené blány napjaté přes kovovou boční stěnu válce. Mezi blanami je uzavřen vzduchový válcový prostor. Průměr bubnu bývá 90 až 110 cm, výška válce 40 až 60cm. Při hře stojí buben kovovou stěnou na podstavci, takže jsou obě blány ve svislé poloze.Do jedné z blan tluče bubeník paličkou. Tón velkého bubnu je krátký a tupý. Má neurčitou výšku, protože chvění blány, do které jsme udeřili paličkou, se ruší zpětnými odrazy uvnitř bubnu a vzniká tak mnoho nepravidelných souzvuků a šramotu. V orchestru má velký buben rytmickou funkci. Palička je připojena k pedálu, aby bubeník mohl velký buben ovládat nohou a rukama hrát na ostatní bicí nástroje.

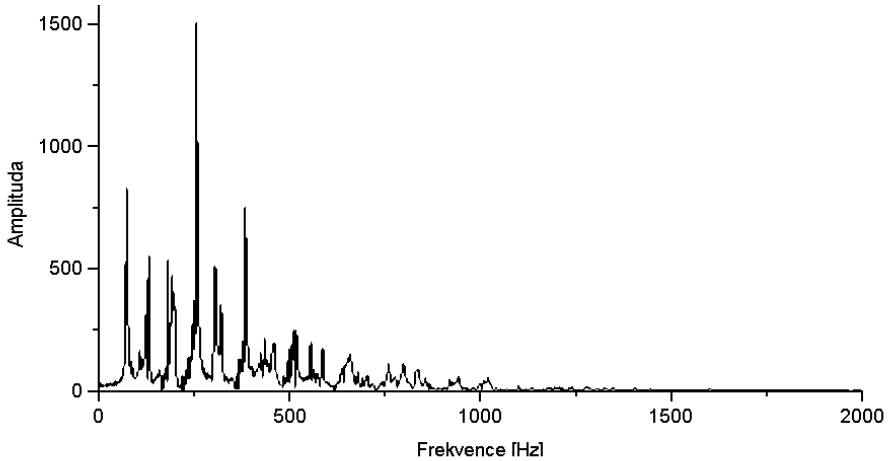
Malý buben je vlastně malý druh velkého bubnu. Jeho válcový rám je vyrobený z mosazi a je z obou stran potažen telecí nebo oslí kůží. Kruhová blána malého bubnu má v průměru 32 až 38 cm. Přes spodní tenčí blánu jsou napnuty 3 až 4 struny, které

způsobují typický drnčivý zvuk malého bubnu. Horní tlustší blánu rozechvíváme pomocí dvou paliček z tvrdého dřeva.

Obr. 3.1. Fourierova analýza bubnu rozkmitaného u kraje membrány



Obr. 3.2. Fourierova analýza bubnu rozkmitaného ve středu membrány



Tamburína (nebo též baskický bubínek) má dřevěný nebo kovový válcový rám potažený kůží jen z jedné strany. Její průměr je 22 až 35 cm. Ve válcovém rámu jsou v malých otvorech přimontovány malé kovové chrastící kotoučky, které se při úderu na blánu také rozechvějí. Tamburína se rozechvívá buď úderem ruky do středu blány nebo do válcového rámu, anebo se třese celým bubínkem bez úderu ruky (technika hry nazvaná *tremolo*).

3.4. Aerofony

3.4.1. Rozdělení a konstrukce aerofonů

Aerofony jsou hudební nástroje, u kterých zvuk (tón) vzniká kmitáním vzdušného sloupce, uzavřeného v určité rezonanční dutině. Do této skupiny patří všechny hudební nástroje dechové a také některé další. Kmity vzdušného sloupce je možné vybudit různými způsoby a podle tohoto hlediska můžeme aerofony rozdělit do dvou základních skupin:

1. Nástroje založené na principu retné píšťaly
2. Jazýčkové hudební nástroje

   Tyto nástroje můžeme ještě dále rozdělit podle typu a funkce jazýčku na:

   a. Jednoplátkové hudební nástroje
   b. Dvojplátkové hudební nástroje
   c. Plechové (žesťové) hudební nástroje
   d. Hudební nástroje s kovovými jazýčky

Bez ohledu na způsob buzení kmitů můžeme o těchto aerofonech říci, že jsou složeny ze dvou spřažených systémů. První systém – budič – zajišťuje samotný vznik kmitů, které mohou mít různé frekvence. Tóny takto vybuzené mohou být však velice slabě slyšitelné a také je velice obtížné nastavit budič tak, aby vydával tón o jedné konkrétní předem stanovené frekvenci. K překonání těchto překážek právě slouží druhý systém - rezonátor – v našem případě je to vzdušný sloupec uzavřený v rezonanční dutině, který má za úkol zesílit vybuzené kmity. Vzdušný sloupec však zesílí kmity pouze takových frekvencí, které tvoří spektrum jeho vlastních frekvencí. Výslednou frekvenci tedy můžeme ovlivňovat cíleným nastavením vlastností (především rozměrů) vzdušného sloupce a tedy rezonanční dutiny (rezonátoru). Na druhou stranu však i budič má při určitém konkrétním nastavení možnost vybudit frekvence pouze v určitém rozmezí. Toto rozmezí se dá jistými úpravami posunovat a tím do určité míry rozšířit, ale přesto je rozsah frekvencí nástroje omezený.

3.4.2. Kmity vzdušného sloupce

Nyní se zaměříme na samotné kmity vzdušného sloupce – tedy na chování rezonátoru, které bude společné pro všechny nástroje. Různé typy buzení kmitů probereme později pro jednotlivé nástroje zvlášť.

Nechť je vzduchový sloupec na jednom svém konci v kontaktu s budičem kmitů. Vzduch na tomto konci sloupce se tedy rozkmitá, a protože v plynu se může šířit pouze podélné (nikoliv příčné) vlnění, sloupcem se začne šířit postupná podélná vlna. Již dříve jsme řekli, že vzduchový sloupec je ohraničen určitou rezonanční dutinou. V případě hudebních nástrojů můžeme za tuto dutinu považovat trubici, která je buď válcová nebo kónická (kuželovitě se rozšiřuje), a může být na svých koncích buď otevřená nebo na jednom konci uzavřená (krytá). V některých případech má trubice obdélníkový průřez (např. některé varhanní píšťaly).

Z hlediska fyzikálního popisu je nejjednodušší šíření podélné vlny válcovou trubicí, protože její vlnoplochy jsou přibližně rovinné. Vlna se tedy šíří od místa, kde jsou kmity vybuzeny, ke konci trubice. Na konci trubice tato vlna naráží na určité rozhraní, které je dáno tím, zda je trubice uzavřená nebo otevřená. K tomu, abychom mohli popsat děje na rozhraní, zavádíme veličinu nazvanou charakteristická impedance Z, která je charakteristikou daného prostředí, a platí pro ni vztah

$$Z = \frac{a \cdot \gamma \cdot p}{c} \tag{4.1}$$

kde a je plocha průřezu trubice, γ je Poissonova konstanta, p je tlak a c je rychlost zvuku. Pro některé aplikace se používá charakteristická impedance vztažená na jednotku plochy – tzv. akustická impedance Z_a, pro kterou platí

$$Z_a = \frac{Z}{a} = \frac{\gamma \cdot p}{c} = \rho \cdot c\,, \tag{4.2}$$

kde ρ je hustota prostředí, kterým se zvuk šíří. Další na tomto místě důležitou veličinou je koeficient odrazu R, pro který platí vztah

$$R = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \tag{4.3}$$

Veličiny Z_1, Z_2 v tomto vztahu označují charakteristické impedance dvou prostředí, která na sebe navazují a tak vlastně tvoří ono rozhraní. Koeficient odrazu R udává poměr intenzity odraženého a původního vlnění. Kromě koeficientu odrazu R existuje též koeficient průchodu T, který udává poměr intenzity prošlého a původního vlnění, a

platí mezi nimi vztah $R+T=1$. Z rovnice (4.3) vyplývá, že koeficient odrazu bude nulový pouze v tom případě, že charakteristické impedance budou pro obě prostředí stejné. Při jakékoliv změně charakteristické impedance se tedy vlnění alespoň z části odráží.

Nyní se vrátíme k otázce rozhraní na konci trubice. Je-li konec trubice otevřený, mohli bychom tvrdit, že prostředí uvnitř i vně trubice je stejné – totiž vzduch. Zcela určitě se však liší parametr a – plocha průřezu prostoru, kterým se vlnění šíří. Podle vztahu (3) se tedy liší také charakteristické impedance a vlnění se na otevřeném konci odráží, a to se stejnou fází jako dopadající vlnění (analogie s odrazem na volném konci u příčného vlnění např. struny). Dopadající a odražená vlna spolu vzájemně interferují a vzniká stojaté vlnění. Na obou volných koncích je pohybová kmitna (akustický tlak i hustota tu jsou konstantní; kmitna rychlosti tedy představuje zároveň tlakový a hustotní uzel). Uprostřed trubice je naopak pohybový uzel, příslušné body jsou stále v klidu, ale v jejich okolí vznikají maximální změny akustmického tlaku a hustoty, neboli kmitny tlaku a hustoty. Zároveň se může však ve válcovém sloupci otevřeném tvořit stojatá podélná vlna taková, že uvnitř vznikají dva, tři, čtyři a více uzlů. Je-li délka trubice l a označíme-li délky příslušných stojatých vln v otevřené válcové dutině $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, ...\lambda_n$, lze psát

$$l = \frac{1}{2}\lambda_1 = \frac{2}{2}\lambda_2 = \frac{3}{2}\lambda_3 = ... = \frac{n}{2}\lambda_n \,. \tag{4.4}$$

Odtud

$$\lambda_1 = 2l\,,\ \lambda_2 = l\,,\ \lambda_3 = \frac{2}{3}l\,,\ ...,\lambda_n = \frac{2}{n}l\,, \tag{4.5}$$

jak je vidět také na obrázku 4.1. Frekvence odpovídajících tónů v trubici vyvolaných jsou

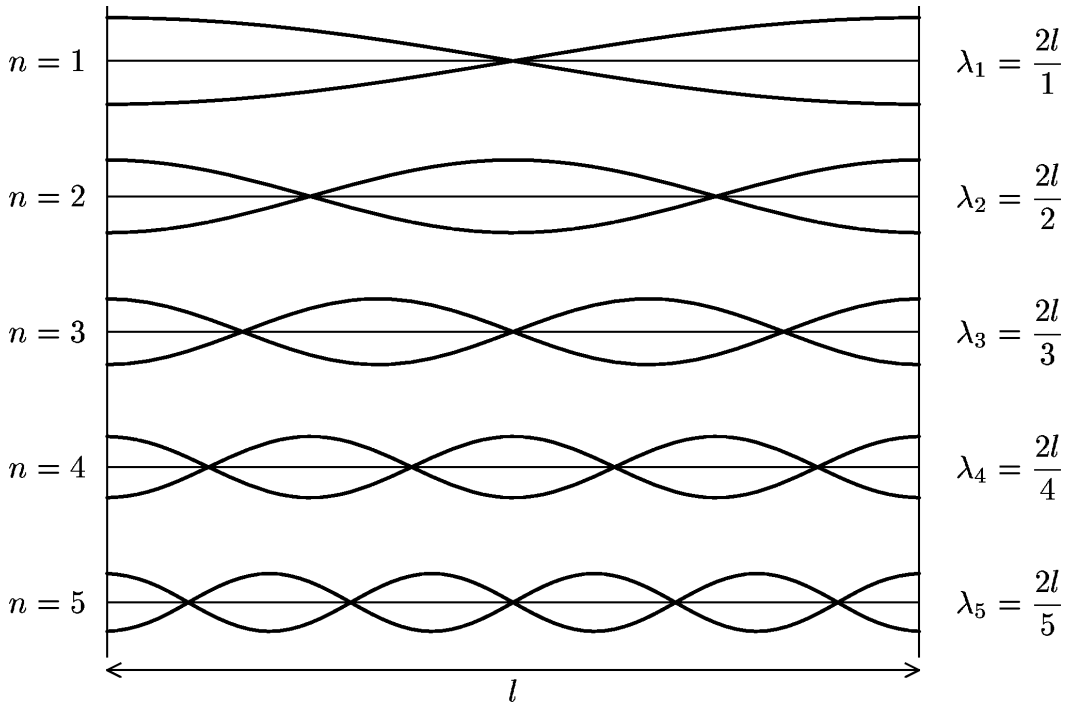
$$f_n = \frac{c}{\lambda_n} = n\frac{c}{2l}\,, \tag{4.6}$$

kde c je rychlost zvuku. Rovnici můžeme přepsat na tvar

$$f_n = n \cdot f_1\,. \tag{4.7}$$

Z toho vyplývá, že válcová trubice na obou koncích otevřená je schopna vydávat kromě základního tónu o frekvenci f_1 i tóny s kmitočty $2f_1, 3f_1,...,nf_1$, tzn. všechny vyšší tóny harmonické.

Obr. 4.1. Kmity vzduchu v otevřené píšťale



Je-li konec trubice uzavřený, zvuková vlna naráží na rozhraní tvořené z jedné strany proudícím vzduchem a z druhé strany materiálem trubice – pevnou látkou. V tomto případě plocha průřezu trubice bude stejná jako plocha průřezu materiálu na konci trubice, který ji uzavírá, ale naopak rychlost šíření zvuku c bude pro vzduch a pro materiál trubice určitě různá a stejně tak hustota ρ bude v obou prostředích různá. Podle vztahu (4.2) se tedy budou lišit také akustické impedance v obou prostředích a koeficient odrazu tak bude nenulový. Dá se dokázat, že $Z_1<Z_2$ a podle vztahu (4.3) pak koeficient odrazu vyjde záporně. To znamená, že se vlnění na uzavřeném konci odrazí s opačnou fází (analogie s odrazem na pevném konci u příčného vlnění). Původní a odražená vlna spolu opět interferují, ale tentokrát mají stojaté vlny u uzavřeného konce pohybový uzel. Na délce trubice l tak vznikají vlny s vlnovými délkami λ_1, λ_2, …, λ_n, přičemž $l = \frac{1}{4}\lambda_1 = \frac{3}{4}\lambda_2 = \frac{5}{4}\lambda_3 = \frac{7}{4}\lambda_4 = \ldots = \frac{2n-1}{4}\lambda_n$. Obecně proto

$$\lambda_n = \frac{4l}{2n-1}. \tag{4.8}$$

Pro konkrétní n je situace znázorněna na obráaku 4.2. Pro frekvenci f_n platí vztah

$$f_n = \frac{c}{\lambda_n} = c\frac{2n-1}{4l} \tag{4.9}$$

a zároveň

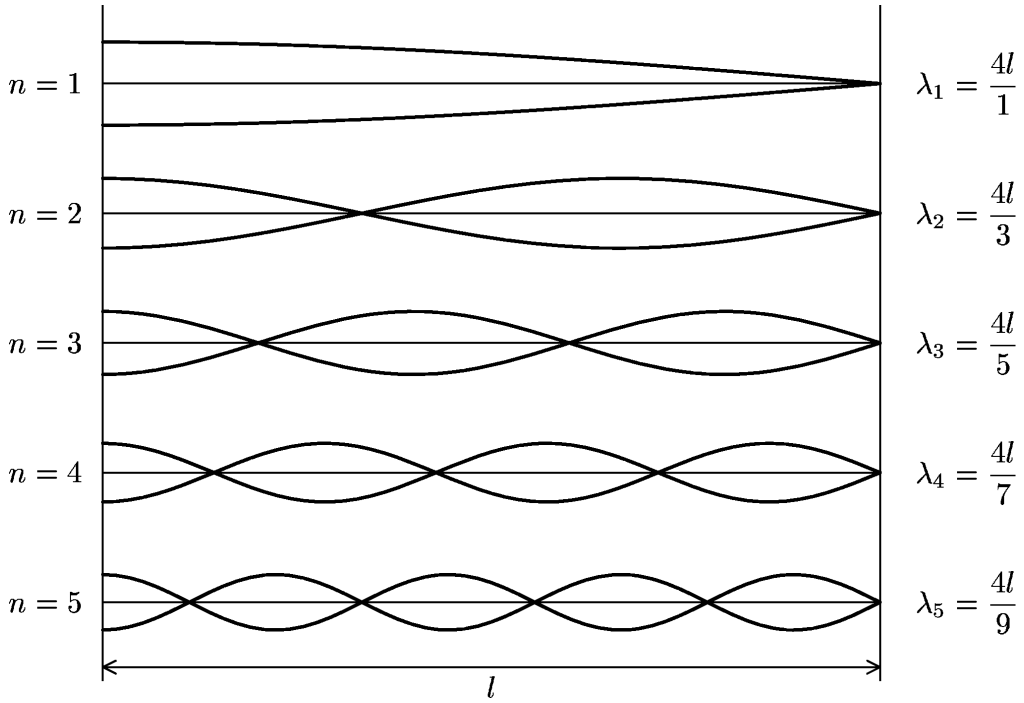
$$f_1 = \frac{c}{4l} \tag{4.10}$$

Porovnáním vztahů (4.9) a (4.10) dostaneme

$$f_n = c\frac{2n-1}{4l} = (2n-1)f_1 \tag{4.11}$$

Z této rovnice vyplývá závěr, že ve válcové vzduchové trubici na jednom konci uzavřené mohou vznikat kromě základního tónu o kmitočtu f_1 ještě liché harmonické tóny o frekvencích $3f_1, 5f_1, 7f_1 ...., (2n-1)f_1$, kde n je celé kladné číslo.

Obr. 4.2 Kmity vzduchu v kryté píšťale



Zatím jsme se zabývali pouze válcovými trubicemi. Je-li trubice kuželová (neboli též kónická), je situace poněkud složitější. Problém je v tom, že zatímco ve válcové trubici se vlna šíří přibližně v rovinných vlnoplochách, kuželovou trubicí se bude šířit ve vlnoplochách kulových. Z praktických zkušeností plyne, že v kuželové trubici na jednom konci uzavřené a na druhém konci otevřené vzniká řada vlastních frekvencí stejná jako u válcové trubice otevřené na obou koncích. Kromě základního tónu se zde tedy tvoří všechny vyšší harmonické tóny. Toto pravidlo však platí pouze v tom případě, že je trubice dostatečně velká. Na rozdíl od válcových trubic, kde je vzdálenost kmitny od sousedního uzlu vždy rovna čtvrtině vlnové délky příslušného

tónu, jsou v kuželových trubicích rovnoměrně rozmístěny pouze kmitny (ve vzdálenostech $\frac{\lambda}{2}$), uzly jsou nesymetricky vysunuty k užšímu zavřenému konci trubice. Poslední uzel je vždycky u úzkého konce trubice. U válcové na obou koncích otevřené trubice jsou vzdálenosti uzlů od jednoho konce trubice pro *k*-tý harmonický tón $\frac{0.5}{k}$, $\frac{1.5}{k}$, $\frac{2.5}{k}$, $\frac{3.5}{k}$,... délky *l* sloupce. Polohy uzlů v kónické trubici jsou pro *k*-tý harmonický tón 0, $\frac{1.43}{k}$, $\frac{2.46}{k}$, $\frac{3.47}{k}$,… délky *l* sloupce. Pro vlastní frekvence kuželových sloupců platí rovnice (6), (7) odvozené pro válcové otevřené sloupce.

3.4.3. Tvoření tónů u aerofonů

Vybuzení vyšších harmonických tónů lze prakticky dosáhnout tzv. přefukováním. Při určitých změnách tlaku se může frekvence budících kmitů a tím i frekvence kmitů vzdušného sloupce zdvojnásobit, ztrojnásobit, atd. Změny tlaku souvisí s tím, „jak silně“ hudebník do nástroje fouká. Při zdvojnásobení frekvence základního tónu slyšíme tón zvýšený od základního tónu o jednu oktávu, při ztrojnásobení tón zvýšený o jednu oktávu a kvintu, při zčtyřnásobení tón zvýšený o dvě oktávy, atd. Frekvenci základního tónu udává celková délka vzduchového sloupce *l*.

U některých dechových hudebních nástrojů můžeme měnit frekvenci tónů pouze přefukováním (např. fujara, poštovská trubka atd.), u jiných je však zabudován určitý mechanismus, který ovlivňuje frekvenci základního tónu. To se dá provést například tak, že jsou z boční strany do stěny trubice navrtány otvory v určitých stanovených rozměrech. Jsou-li všechny tyto otvory zakryté, základní tón je určen celkovou délkou trubice. Budeme-li však otvory postupně (od konce) odkrývat, efektivně tak zkrátíme rozkmitaný vzduchový sloupec uvnitř trubice a tím se mění i frekvence základního tónu. Některé tóny se však tvoří tak, že nejsou odkryté pouze spodní otvory, ale např. jsou zakryté otvory na obou koncích a mezi nimi uprostřed jsou některé otvory odkryté. V těchto případech už je velice složité přesně stanovit vztah pro frekvenci tónu. Problém souvisí s tím, že v okolí otvoru se původně rovinná podélná vlna deformuje a mění se charakteristická impedance *Z* a tím i frekvence základního tónu. Frekvence tónu závisí také na tom, zda otvor zakryjeme úplně a nebo jenom zčásti, protože podle

vztahu (4.1) je charakteristická impedance přímo úměrná průřezu. Existují i jiné způsoby, jak měnit frekvenci základního tónu, ale o těch se zmíníme až u jednotlivých nástrojů. Při výsledné tvorbě tónů se využívá obou efektů – jak zvyšování základního tónu, tak přefukování.

3.4.4. Nástroje založené na principu retné píšťaly

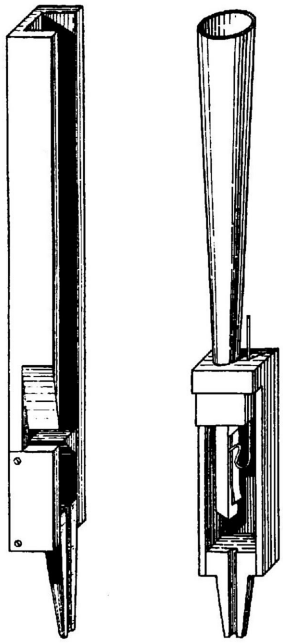
Retná píšťala je válcová trubice, která ohraničuje vzduchový sloupec. Může být otevřená i uzavřená (krytá) a její průřez může být kruhový i obdélníkový. Počáteční část trubice je zúžená do štěrbiny, kterou se do trubice vhání vzduch. Hned za štěrbinou je v horní stěně trubice malý úzký otvor, který je ukončen ostrou hranou tak, že proud vzduchu, který projde štěrbinou, narazí přesně do této ostré hrany. Tato část trubice (otvor a hrana) se nazývá rty píšťaly (proto pojmenování retná píšťala). Od štěrbiny se trubice rozšiřuje a od rtů píšťaly až ke konci už má stálý průřez. Při výpočtu frekvence pak za délku vzduchového sloupce považujeme vzdálenost od rtů píšťaly ke konci trubice.

Nyní se podíváme na to, jak se v takovém systému dají vybudit kmity, které rozkmitají vzduchový sloupec. Jestliže proud vzduchu prošlý úzkou štěrbinou narazí do ostré hrany, mění se dříve ustálený vzdušný proud v turbulentní proudění. Po obou stranách hrany, uvnitř i vně, se tvoří periodicky se opakující víry. Tyto periodicky se opakující víry vznikají nejen při nárazu na hranu, ale také při průchodu proudu vzduchu úzkou štěrbinou, u které alespoň jedna z delších hran je zaostřena. Počet vírů, které vznikají při popsaných dějích v jedné sekundě, určuje frekvenci tónu nazývaného třecím tónem. Třecí tóny znějí samy o sobě velice slabě, pokud nejsou zesíleny rezonancí spřaženého vzduchového sloupce. Třecími tóny se zabýval český fyzik Čeněk Strouhal a pro frekvenci třecího tónu stanovil vztah $f = \frac{v}{u}$, kde v je rychlost proudění vzduchu a u je šířka štěrbiny. Frekvence třecího tónu roste se zvětšující se rychlostí vzdušného proudu a se zmenšující se šířkou štěrbiny.Přesáhne-li rychlost vzduchu určitou mezní hodnotu, rozpadá se každý vír ve dva, čímž se frekvence tónu zdvojnásobí. Při dalším zvýšení tlaku vzduchu se rozpadá původní vír na tři samostatné víry, atd. Toho se využívá při přefukování. Periodicky opakující se vzdušné víry jsou v těsném kontaktu se vzdušným sloupcem uzavřeným ve válcové trubici a tím tento vzduchový sloupec

rozkmitají. Třecí tóny zde hrají roli budiče kmitů, vzduchový sloupec představuje rezonátor. Třecí tóny mohou mít různé frekvence, ale jak už bylo výše řečeno, vzduchový sloupec rezonančně zesílí pouze takové z nich, které jsou celistvým násobkem vlastní frekvence vzduchového sloupce-což je zároveň frekvence základního tónu. Pro výpočet frekvence výsledného tónu nástroje použijeme vztahy (4.6), (4.7), (4.11).

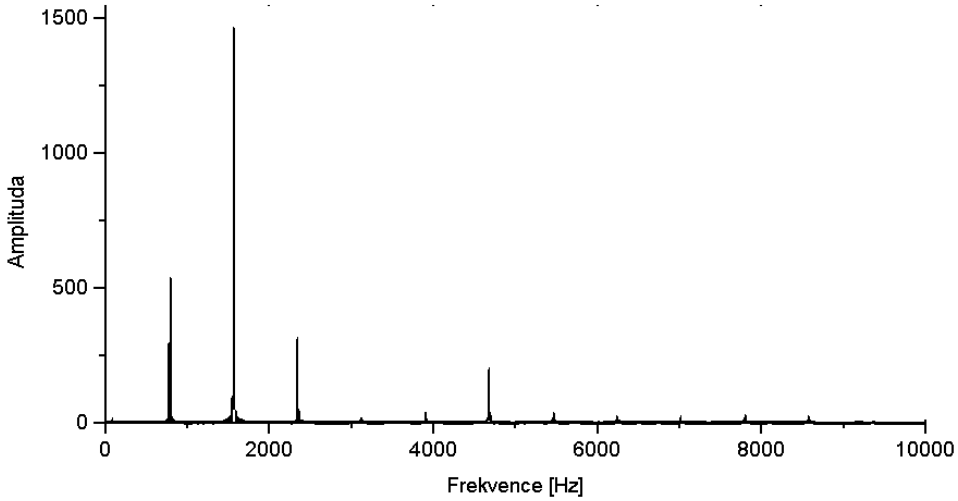
Na principu retné píšťaly fungují různé hudební nástroje, např. některé **varhanní píšťaly**, do nichž je vzduch vháněn měchem.

Obr. 4.3. Varhanní píšťaly, vlevo retná, vpravo jazýčková (převzato z [5])



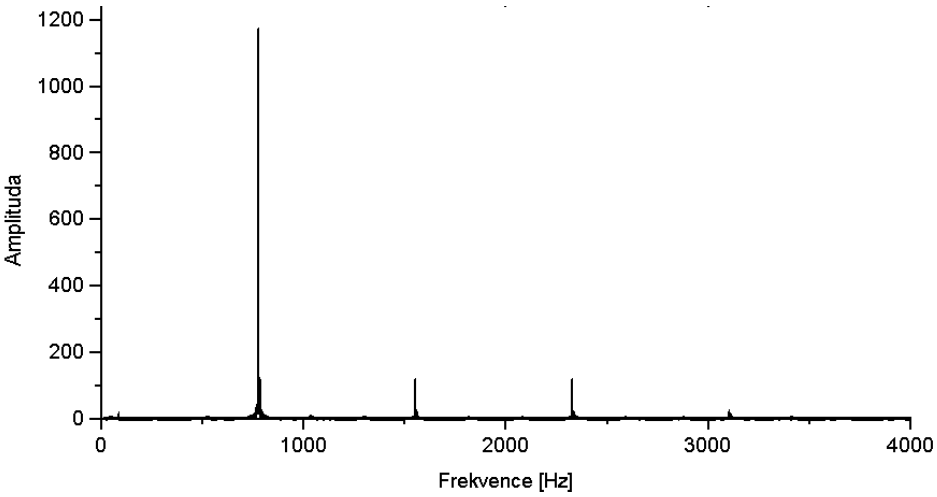
Zobcová flétna je retná píšťala s otevřeným koncem, bývá vyrobena ze dřeva nebo z umělé hmoty a podle její délky rozlišujeme zobcovou flétnu sopránovou, altovou, tenorovou a basovou. Samozřejmě platí, že čím je flétna delší, tím je frekvence nižší a tón hlubší. Na rozdíl od varhanních píšťal nebo od fujary jsou ve stěně flétny navrtány otvory, kterými lze ovlivňovat frekvenci základního tónu, jak bylo popsáno výše. Dále se při hře na flétnu využívá přefukování do druhého a třetího tónu harmonického a celkový rozsah tónů tvoří dvě až tři oktávy.

Obr. 4.4. Fourierova analýza zobcové flétny



Fujara je dlouhá dřevěná trubice s otevřeným koncem, která rovněž funguje na principu retné píšťaly. Tóny na ní tvoříme přefukováním a také zakrýváním a odkrýváním konce trubice.

Obr. 4.5. Fourierova analýza fujary



Příčná flétna je kovová trubice, na začátku krytá, na konci otevřená. Na počátku trubice není zobec se štěrbinou jako u zobcové flétny, ale z boční strany je v trubici umístěn otvor s ostrým ohraničením. Hudebník do tohoto otvoru fouká vzduch. Protože

však u této flétny není zabudována žádná úzká štěrbina, musí hudebník tuto štěrbinu utvořit svými rty. Takto přesně vymezený proud vzduchu se pak žene přes ostrou hranu otvoru a opět vznikají třecí tóny, které rozechvívají vzduchový sloupec. Aby bylo možné měnit frekvenci základního tónu, jsou opět do stěn flétny navrtány otvory. Tyto otvory se zakrývají nebo naopak odkrývají pomocí speciálního pákového systému.

3.4.5. Jazýčkové hudební nástroje

Velkou skupinu hudebních nástrojů tvoří tzv. jazýčkové hudební nástroje. Jejich základ tvoří vzduchová komora, která má tvar protáhlého úzkého dutého kvádru. Horní stěnu komory zčásti nahrazuje pružný jazýček, upevněný na jednom konci šroubem, na druhém konci volný. Jazýček může mít rozměry nepatrně menší než výřez ve stěně komory. Tomuto typu jazýčku říkáme jazýček průrazný (nebo také volný). Jsou-li rozměry jazýčku takové, že jen nepatrně překrývá otvor komory, naráží jazýček při kmitání na okraj pevné stěny komory. Tento typ jazýčku nazýváme jazýček nárazný.

Pokud není rozkmitaný jazýček napojen k rezonátoru (ke vzduchovému sloupci), představuje tyč nebo desku na jednom konci upevněnou, která koná ohybové kmity. Frekvence f vydávaného tónu je pak závislá pouze na rozměrech jazýčku a na vlastnostech použitého materiálu, tedy platí:

$$f = k\frac{d}{l^2} \tag{4.12}$$

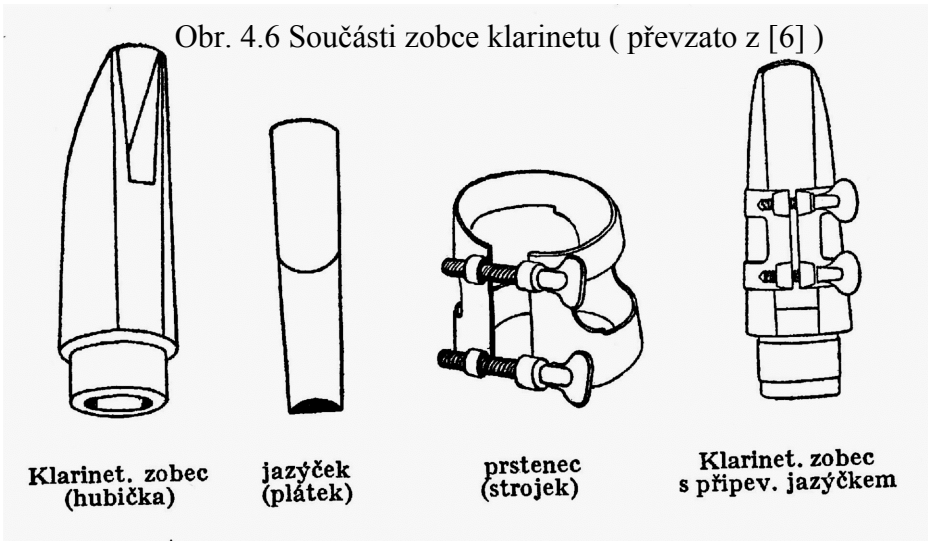
kde konstanta k je dána jakostí a druhem materiálu, d je tloušťka jazýčku, l jeho délka. Čím větší je modul pružnosti v tahu jazýčku, tím je větší i frekvence tónu. U průrazných jazýčků výška tónu téměř nezávisí na tlaku proudícího vzduchu (kolísá v malých mezích), naopak u nárazného jazýčku se může frekvence měnit s měnícím tlakem v rozsahu až dvou oktáv. Barva tónu závisí na materiálu, z něhož je jazýček vyroben, a na jeho tvaru.

Je-li jazýček spojen s rezonanční trubicí, vzniká podobně jako např. u flétny spřažená soustava oscilátoru (jazýček) a rezonátoru (vzduchový sloupec). Jazýčky můžeme rozdělit na několik typů a to na třtinové, dvojité membranózní a kovové.

3.4.6. Jednoplátkové hudební nástroje

Hlavním nástrojem v této skupině je **klarinet**. Je to dřevěná nebo umělohmotná válcová trubice, která je na svém horním konci zobcovitě zúžená (z jedné strany je šikmo seříznutá) a uzavřená a na dolním konci otevřená a nálevkovitě rozšířená. Na horním konci trubice je v boční stěně naproti seříznuté části vyříznut otvor přibližně obdélníkového tvaru. Tento otvor zcela překrývá tenký třtinový plátek, který je také přibližně obdélníkový a na svém konci je upevněn šroubem k trubici v místě dolní části otvoru (jedná se o jazýček nárazný). Důležité však je, že plátek má klínovitý průřez – zužuje se od místa svého upevnění až k volnému konci, ale také od středu do stran. Takový tvar plátku jednak zvyšuje jeho pružnost a jednak způsobuje, že plátek úplně nedoléhá ke stěně trubice a vzniká tak zde úzká klínovitá mezera.

Obr. 4.6 Součásti zobce klarinetu (převzato z [6])



Jestliže proudí touto mezerou do trubice vzduch, rychlost jeho proudění je vyšší, než rychlost vzduchu vně plátku. V mezeře tak vzniká podtlak a plátek se přiblíží k otvoru. Už toto náhlé přiblížení plátku utvoří na začátku vzduchového sloupce postupnou tlakovou vlnu, která se šíří až k otevřenému konci trubice, kde se odrazí a vzniká stojatá vlna o vlastní frekvenci vzduchového sloupce. Tato vlna rozkmitá také plátek, který bude kmitat rovněž vlastní frekvencí sloupce. Kmity vzduchového sloupce mají větší útlum než kmity plátku. Plátek zde tvoří budič kmitů a vzduchový sloupec představuje rezonátor. Protože klarinet je vlastně trubice na jednom konci uzavřená, při přefukování

bude vydávat pouze liché harmonické tóny. Abychom mohli měnit frekvenci základního tónu, jsou do stěny nástroje podobně jako u flétny navrtány otvory, které hudebník zakrývá a odkrývá pomocí pákového systému. Pomocí otvorů a přefukování lze na klarinetu vytvořit tónová řada o rozsahu až tří oktáv. To ovšem znamená, že plátek musí být schopný kmitat na všech těchto frekvencích. Počet kmitových módů oscilátoru závisí na tom, do jaké míry je jeho kmitání tlumené. To znamená, že pokud bychom plátek klarinetu nijak netlumili, mohlo by se stát, že vůbec nedojde k rezonanci plátku a vzduchového sloupce a žádný tón se neozve. Při hře na klarinet svírá hudebník horní zobcovitou část klarinetu (hubičku) rty a to tak, že horní ret se dotýká seříznuté části a dolní ret se dotýká plátku a to tak silně a v takovém místě, aby ho vhodně tlumil. Do mezery pak fouká vzduch. Pokud se dolní ret dotýká plátku jen velmi lehce, vůbec ho tím vlastně netlumí a tón se neozve. Pokud je ret přitisknutý k plátku moc pevně, utlumí ho zase natolik, že pak nekmitá vůbec. Umístění rtu na plátku pak ovlivňuje, zda se vytvoří základní nebo vyšší harmonický tón (přefukování).

Dalším nástrojem patřící do této skupiny je **saxofon**. Je to kovový nástroj klarinetového typu s jednoduchým třtinovým jazýčkem. Avšak na rozdíl od klarinetu má saxofon nikoliv válcový, ale kuželový tvar rezonanční trubice, a proto může vydávat jak liché, tak i sudé vyšší harmonické tóny (může přefukovat do oktávy).

3.4.7. Dvojplátkové hudební nástroje

Jazýček (vlastní oscilátor) těchto nástrojů je složen ze dvou rákosových plátků, vydutých a nahoře rovně seříznutých. Plátky jsou k sobě přiloženy konkávními stěnami. Jsou upevněny do tzv. strojku, který je mechanicky spřažen s trubicí nástroje a je tak v kontaktu se vzduchovým sloupcem. Úzkou štěrbinou mezi oběma plátky proudí z hudebníkových úst vzduch, jehož rychlost je vyšší než rychlost vzduchu vně plátků. Vzniká tak mezi nimi podtlak, přiblíží se k sobě a vytvoří tlakovou vlnu v trubici. Dále je už je princip úplně stejný jako u klarinetu. Plátky se při kmitání střídavě k sobě přibližují a oddalují.

Hlavním nástrojem v této skupině je **hoboj**. Je vyroben ze dřeva, většinou ebenového. Jeho trubice má kuželový tvar, takže se uplatní sudé i liché harmonické tóny.

Anglický roh je typ altového hoboje, strojek s rákosovými plátky je mírně zahnut k ústům hráče a dolní konec má hruškovitý tvar. Zajímavé je, že hruškovité zakončení anglického rohu má sinusový charakter a lze dosti spolehlivě vyjádřit matematickou funkcí:

$$y = 0{,}029 \sin(0{,}85x),$$

kde x, y jsou vyjádřeny v jednotkách délky.

Fagot je basový nebo tenorový nástroj, jeho trubice je dřevěná, kuželová a 280 cm dlouhá. Z tohoto důvodu je trubice v polovině přeložena a obě paralelně k sobě přiložené části jsou spojené trubicí ve tvaru písmene U. Strojek s dvojitým třtinovým jazýčkem je esovitě zakřiven.

Dalším možná trochu netypickým nástrojem této skupiny jsou **dudy**. Jedna, popřípadě dvě píšťaly dud jsou basové, kratší píšťala s vrtanými otvory hraje melodii. Tato píšťala má kuželový tvar a dvojitý třtinový jazýček. Dají se na ni zahrát tóny určité durové stupnice v rozsahu jedné oktávy. Basové píšťaly jsou buď válcové nebo kuželové, mají jednoduchý třtinový jazýček a jsou laděny v kvintě vzhledem k melodické píšťale. Vzduch se vhání do píšťal měchem.

Obr. 4.7 Dudy (převzato z [6])

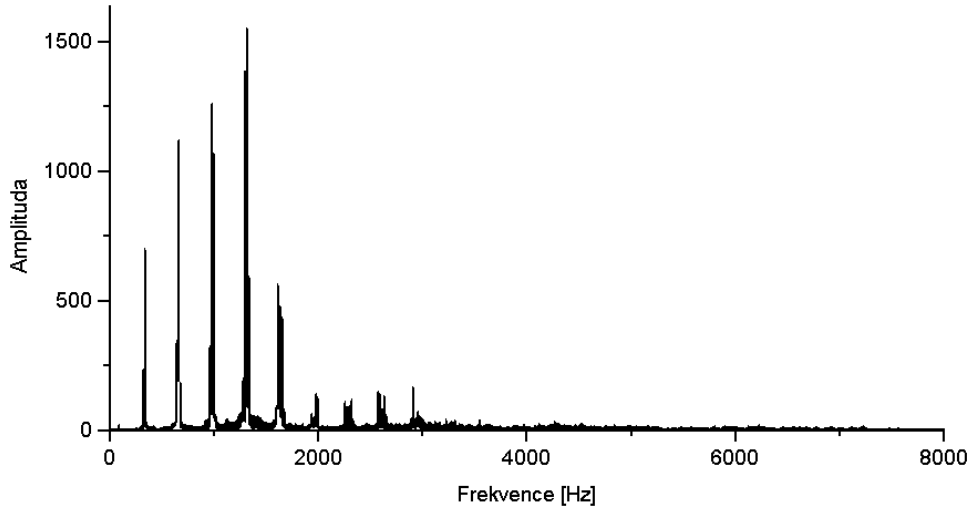
3.4.8. Plechové hudební nástroje

U plechových (neboli žesťových) hudebních nástrojů tvoří jazýček hudebníkovy rty – je to dvojitý blanitý (membranózní) jazýček. Na začátek nástrojové trubice se nasazuje tzv. nátrubek, který má nálevkovitý nebo kotlovitý tvar a je vyroben většinou z mosazi. Nátrubek je mechanicky spřažen se vzduchovým sloupcem uzavřeným v nástrojové trubici. Při hře hudebník vloží střední část rtů do nátrubku, rozkmitá rty a současně fouká do nástroje vzduch. Od kmitů rtů se rozkmitá vzduch v trubici vlastní frekvencí vzduchového sloupce a této frekvenci se pak také přizpůsobí hudebníkovy rty. Takže je to opět stejný princip jako u klarinetu nebo hoboje. Nátrubek ve spřažené soustavě se vzduchovým sloupcem má za úkol stále regenerovat periodicky proměnný proud vzduchu, zatímco vzduchový sloupec má funkci rezonátoru. U plechových nástrojů nejsou ve stěně žádné otvory pro zvyšování základního tónu. Různé tóny se však dají tvořit přefukováním např. u přirozené trubky (polnice, poštovská trubka) nebo u přirozeného lesního rohu (signální roh). Oba nástroje vydávají vyšší harmonické tóny až do pořadového čísla 18, základní tón však nelze utvořit. V 19. století bylo zavedeno tzv. ventilové strojivo – vložkové trubice (snižce) s ventily, kterými se prodlužuje proud vzduchu procházející hlavní trubicí. Prvním ventilem se vpojuje do nástrojové trubice snižec, kterým se snižuje základní ladění nástroje o 2 půltóny tedy o celý tón. Aby byl základní tón trubice o tón nižší, musela by být její délka $\frac{9}{8}$ původní délky *l*. Snižec napojený do trubice musí mít potom délku $\frac{1}{8}l$, protože $l+\frac{1}{8}l=\frac{9}{8}l$. Druhým snižcem klesá ladění o půltón, takže jeho délka musí být $\frac{1}{15}l$, neboť $l+\frac{1}{15}l=\frac{16}{15}l$. Třetím ventilem se dosahuje snížení o 3 půltóny neboli o malou tercii, tento snižec pak musí mít délku $\frac{1}{5}l$, protože $l+\frac{1}{5}l=\frac{6}{5}l$. Pokud je plechový nástroj vybaven čtvrtým ventilem a snižcem, snižuje základní ladění o 5 půltónů neboli o čistou kvartu a jeho délka musí být $\frac{1}{3}l$, poněvadž $l+\frac{1}{3}l=\frac{4}{3}l$. Ventily jsou buď pístové nebo mají tvar otáčivých nebo tlačítkových kohoutů s vyvrtaným otvorem. Kombinací ventilů a přefukováním tvoříme tóny nástroje.

Ventilový lesní roh je mosazná kruhovitě stočená trubice o délce asi 3,6 m, má nálevkovitý nátrubek. Trubice je zpočátku válcová, po průchodu ventily se mírně kuželovitě rozšiřuje a přechází v široký exponenciálně se rozvírající ozvučník.

Ventilová trubka (tromba) má nástrojovou trubici stočenou do tvaru protáhlého oválu. Trubice je válcová, má úzký průřez a délku 132 cm. Po průchodu strojivem se kuželovitě rozšiřuje a ústí do nálevkovitého ozvučníku, který je značně menší a méně rozevřený než u lesního rohu.

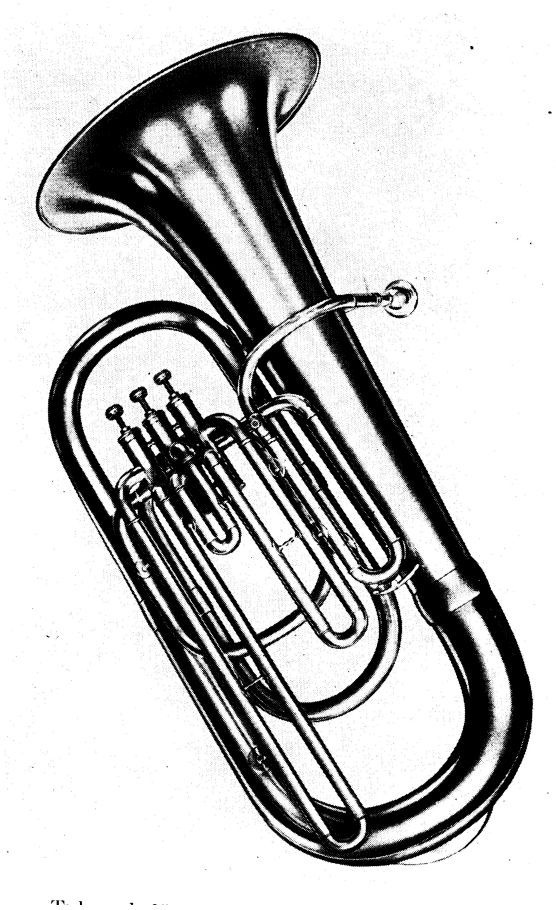
Obr. 4.8. Fourierova analýza trubky



Snižcový pozoun je tenorový nebo basový nástroj. Jeho trubice má délku 280 cm a po celé délce má neměnný úzký průřez, teprve ke konci se kuželovitě rozvírá. Přirozená tónová řada se na rozdíl od trubky nebo lesního rohu doplňuje posuvem válcové U-trubice (snižcem). Jím se délka nástroje prodlužuje. Posuvem snižce do 7 různých poloh vytvoříme všechny tóny chromatické stupnice. Existuje též ventilový pozoun, který má stejný princip jako lesní roh.

Basová a kontrabasová **tuba** tvoří nejhlubší plechové nástroje v orchestru. Tvar trubice je podobný jako u trubky, ale má mnohem větší rozměry. Široký průřez trubice se kuželovitě rozšiřuje.

Obr. 4.9. Tuba (převzato z [7])



3.4.9. Hudební nástroje s kovovými jazýčky

Mezi hudební nástroje s kovovými jazýčky patří jednak jazýčkové varhanní píšťaly a dále harmonium, akordeon a foukací harmonika.

Jazýčková varhanní píšťala (na obrázku 4.3) tvoří výjimku mezi ostatními zmíněnými nástroji, protože její kovový jazýček je jako jediný v této skupině nástrojů spojen s rezonátorem - se vzdušným sloupcem uzavřeným v píšťale. Takže se zde opět objevuje spřažený systém jazýček - vzdušný sloupec, podobně jako např. u klarinetu. Třtinový jazýček klarinetu může měnit frekvenci kmitání v závislosti na délce vzdušného sloupce, pokud je vhodně tlumen, a je tedy schopen kmitat v určitém spojitém intervalu frekvencí. Kovové jazýčky však tuto vlastnost nemají a diskrétní

spektrum jejich frekvencí je pevně dáno jejich tvarem a rozměry a určili bychom je podle vztahu (4.12). Pokud je kovový jazýček jako v případě varhanní píšťaly spojen se vzduchovým sloupcem a chceme, aby se tón vytvořený kmitáním jazýčku rezonancí vzdušného sloupce zesílil, musí být vlastní frekvence kmitů sloupce stejná jako vlastní frekvence kmitů jazýčku. Tak tomu je právě u jazýčkových varhanních píšťal. Barvu tónu u těchto píšťal může ovlivnit jednak materiál jazýčku, dále materiál píšťaly a také to, zda se jedná o píšťalu krytou či otevřenou. Vzduch se do těchto píšťal vhání měchem, stejně jako do varhanních píšťal retných.

Harmonium patří mezi hudební nástroje s kovovými jazýčky, které ovšem nejsou spojeny s rezonátorem (vzduchovým sloupcem). Frekvence tónu tedy závisí pouze na vlastnostech samotného jazýčku a určila by se podle vztahu (4.12). V případě harmonia se jedná o jazýček průrazný. Jazýčky harmonia jsou šroubem upevněny ve vzduchové komoře, která je vždy spojena s klávesou. Měchem se do vzduchové komory vhání vzduch. Stiskem klávesy se ve vzduchové komoře zmenší tlak a jazýček se rozkmitá se svou vlastní frekvencí. Harmonium ovládáme pomocí klaviatury a šlapacích pedálů. Pedály načerpáme vzduch do měchů, odkud se pak dostane do vzduchových komor, a určitý jazýček pak rozezníme stiskem příslušné klávesy. Rozsah harmonia je v rozmezí tónů C až c^5. Porovnáme-li barvu zvuku varhan a harmonia, zjistíme, že varhany znějí oproti harmoniu jemněji a čistěji. Je to způsobeno tím, že kmitající kovový jazýček v podstatě představuje chvějící se desku nebo tyč, u které jsou částkové tóny neharmonické vzhledem k základnímu tónu. U varhanní píšťaly vzduchový sloupec zesílí pouze harmonické částkové tóny jazýčku, takže ostatní částkové tóny budou mít v porovnání s nimi tak malou intenzitu, že je ve výsledném zvuku nebudeme vnímat. U harmonia však není rezonátor, a proto se v barvě zvuku projeví i neharmonické částkové tóny.

Akordeon je hudební nástroj známý také pod názvem tahací či měchová harmonika. Skládá se koženého měchu, složeného do mnoha ostrých záhybů. V jeho boční stěnách jsou umístěny kovové jazýčky. Některé z nich se rozechvívají tlakem vzduchu při sklápění měchu, jiné nasáváním vzduchu při jeho roztahování. Jazýčky rozezníváme stiskem knoflíkových tlačítek nebo kláves na klaviatuře, podobně jako u harmonia. Klaviatura má rozsah tónů 2 až 3 oktávy.

Foukací harmonika nebo též ústní nebo dechová funguje na podobném principu jako harmonium a akordeon. Je to malý nástroj podlouhlého tvaru. Obsahuje vzduchové komory s kovovými jazýčky, seřazené do jedné řady nebo dvou řad

nad sebou. Jazýčky harmoniky se rozechvívají vdechem nebo výdechem vzduchu do příslušné vzduchové komory. Rozsah foukacích harmonik je různý, obvykle 2 až 3 oktávy, ale existují i menší harmoniky. Největší typ má rozsah $c - c^5$.

Literatura

[1] Dr. Čeněk Strouhal *Sborník jednoty českých mathematiků, číslo 4: Akustika*; Praha 1902

[2] Doc. Ing. Vojtěch Mišun, CSc. – soukromé sdělení

[3] Iain G. Main *Kmity a vlny ve fyzice*; Academia Praha 1990

[4] Antonín Špelda *Hudební akustika*; SPN Praha 1978

[5] James Jeans *Věda a hudba*; Dělnické nakladatelství Praha 1946

[6] Pavel Kurfurst *Organologie*; Georgius Hradec Králové 1998

[7] Antonín Modr *Hudební nástroje*; Státní nakladatelství krásné literatury, hudby a umění Praha 1954

[8] Jan Smolík *Technika prostředí*; Praha, SNTL 1970

Obrázky grafů Fourierovy analýzy byly vytvořeny v programu Origin ze zvukových nahrávek hudebních nástrojů.