Domácí úkoly z Matematiky 1

Úkol č. 1

1) Mějme matice $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

   Spočtěte (je–li definováno):

a) $(4B)C + 2B$	b) $2A^T + C$	c) $D^T - E^T$
d) $(D - E)^T$	e) $D^T E^T - (ED)^T$	f) $(AB)C$
g) $A(BC)$	h) $\mathrm{Tr}(D)$	i) $\mathrm{Tr}(D - 3E)$
j) $4\mathrm{Tr}(7B)$	k) $\mathrm{Tr}(A)$	l) $\mathrm{Tr}(DD^T)$
m) $C^T A^T + 2E^T$		

2) Najděte matici $A = (a_{ij})$ typu 4×4 splňující podmínky:

   a) $a_{ij} = i + j$

   b) $a_{ij} = i^{j-1}$

   c) $a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{pro } |i-j| > 1 \\ -1 & \text{pro } |i-j| \leq 1 \end{cases}$

Úkol č. 2

1) Řešte soustavu pomocí Gaussovy eliminační metody (a též jako homogenní):

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + 17x_3 - 29x_4 - 36x_5 &= 22 \\ 2x_1 - 3x_2 + 18x_3 - 27x_4 + 33x_5 &= 21 \\ 12x_1 - 18x_2 + 102x_3 - 174x_4 - 216x_5 &= 132 \\ 2x_1 - 3x_2 + 21x_3 - 24x_4 - 30x_5 &= 20 \\ 2x_1 - 3x_2 + 24x_3 - 21x_4 - 27x_5 &= 19 \end{aligned}$$

2) Nalezněte příklady přímky (zadané parametricky i pomocí dvojice rovin), která je s rovinou $\rho : x + 2y - z - 1 = 0$ a) rovnoběžná, b) splývající, c) má s ní společný právě jeden bod, d)* je na ni kolmá. Kolik takových přímek existuje pro jednotlivé případy a), b), c), d)?

Úkol č. 3

1) Vyjádřete v algebraickém tvaru čísla: $\dfrac{\frac{2+3i}{4i^5}}{\left(\frac{2+i(-5-i^3)}{1-2i}\right)^2}$; $(3+2i)^3[(3+2i)^*]^2$.

2) Komplexní číslo z je možno vyjádřit v algebraickém tvaru $z = x + iy$ i ve tvaru goniometrickém $z = r\cos\varphi + ir\sin\varphi$. Transformační vztahy $(x, y) \to (r, \varphi)$ jsou pak $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\varphi(x, y) = \arctan\frac{y}{x}$. Nebo snad použít $\varphi(x, y) = \arcsin\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ či $\varphi(x, y) = \arccos\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$? Která z těchto tří možností je „přesnější“ a proč?

Úkol č. 4

1) Nechť je dána matice $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & a & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

   a) Jaké musí být číslo a, aby matice A byla regulární (tj. aby její hodnost byla maximální, tj. aby její determinant byl nenulový)?

   b) Najděte její inverzi.

   c) Existuje inverzní matice A^{-1}, když je $\det(A)$ nulový? Zdůvodněte.

d) Ověřte si obecně platný vztah pro regulární matice $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.

2. Nechť A, B jsou čtvercové matice řádu n.

   a) Ukažte, že platí $(AB)^T = B^T A^T$.

   b) Předpokládejme, že A je symetrická a B antisymetrická matice. Dokažte, že součin AB je matice antisymetrická právě tehdy, když A, B komutují vzhledem k maticovému násobení (tzn. že $AB = BA$).

   c) Najděte příklady takovýchto matic A a B.

Úkol č. 5

1. Jsou dána komplexní čísla $z_1 = 1 + 2i$, $z_2 = 1 - i$, $z_3 = -1 + 2i$, $z_4 = -1 - i$.

   a) Převeďte komplexní číslo $\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_3^*}{z_4} + 2z_1 z_2^*$ do algebraického tvaru. Určete jeho modul.

   b) Nalezněte goniometrický tvar čísla $z_1 z_4$.

   c) Vyřešte rovnici $|z - z_1| = |z - z_4|$. Jaký je geometrický význam množiny všech těchto z v Gaussově rovině? Načrtněte.

Úkol č. 6

1) Ukažte, že pro funkci $f(x) = ax^2 + bx + c$ platí rovnost $f(x+3) - 3f(x+2) + 3f(x+1) - f(x) \equiv 0$.

2) a) Mějme funkce $\varphi(x) = x^2$, $\psi(x) = 2^x$. Určete $\varphi(\varphi(x))$, $\psi(\psi(x))$, $\varphi(\psi(x))$, $\psi(\varphi(x))$.

   b) Určete nejmenší periodu funkcí $y = \sin\frac{x}{2} + 2\cos(2x)$, $y = \tan\frac{x}{2} + \sin(2x) + \cos\frac{x}{3}$.

Úkol č. 7

1) a) Vyjádřete racionální funkci $\frac{3x^5 - 3x^2 + 2x - 5}{x^3 - x + 1}$ jako součet polynomu a ryze lomené funkce.

   b) Rozložte racionální funkci $\frac{-5x+2}{x^4 - x^3 + 2x^2}$ na parciální zlomky.

2) Vypočtěte limity: a) $\lim\limits_{x\to 5} \frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$, b) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}$, c) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin t - \cos t}{\cos 2t}$.

Úkol č. 8

1) Vypočtěte limity: a) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 x}$, b) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{x + \frac{\cos^2 \alpha x}{\alpha^2 x}}{x - \frac{\sin \alpha x}{\alpha}} - \frac{1}{x(\alpha x - \sin \alpha x)} \right)$.

2) Spočtěte derivace funkcí: a) $\ln\left[\cos\left(1 - \tan\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)\right]$, b) $\sqrt{x\sqrt[3]{x\sqrt[4]{x\sqrt[5]{x}}}}$. Zobecněním výrazu v b) dostaneme $x\sqrt{x\sqrt[3]{x\sqrt[4]{\ldots\sqrt[n]{x}}}}$. Nalezněte jeho derivaci.

Úkol č. 9

1) Vypočtěte limity: a) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$; b) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \tan(2x)\tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$.

2) Pomocí Taylorovy věty vypočtěte přibližné hodnoty výrazů a) $\sqrt{e}$, b) $\arctan 0,8$.

Úkol č. 10

1) Nalezněte extrémy funkce $y(x) = \cos x - \frac{1}{2}\cos(2x)$.

2) Sestrojte grafy funkcí a) $f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x^2+1}}$, b) $g(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x^2-1}}$.

3)* *(Nepovinné)* Nalezněte největší a nejmenší hodnotu součinu m–té a n–té mocniny ($m > 0$, $n > 0$) dvou kladných čísel, jejichž součet je konstantní a roven a.

Úkol č. 11

1) Integrujte: $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(1+\sqrt[4]{x})^3}$; $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$, kde $f(x) = \begin{cases} x & \text{pro} \quad 0 \leq x \leq t \\ t\frac{1-x}{1-t} & \text{pro} \quad t \leq x \leq 1. \end{cases}$

2) Substitucí $t = \frac{x+a}{x+b}$ vypočtěte integrál $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+a)^m(x+b)^n}$ (m a n jsou přirozená čísla). Pomocí této substituce vypočtěte integrál $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-2)^2(x+3)^3}$.