# Domácí úkoly z Matematiky 2

**Úkol č. 1**

1) Nalezněte číslo $a$ tak, aby soubor vektorů $[(3,3,a,-1),(0,1,1,-1),(5,-3,4,1),(2,2,1,0)]$ byl a) lineárně závislý, b) lineárně nezávislý.

2) V bázi $\bar{e}_1=(0,4,0),\bar{e}_2=(-2,0,0),\bar{e}_3=(1,1,1)$ je vektor reprezentován souřadnicemi $\bar{a}=(5,1,3)$. Nalezněte souřadnice tohoto vektoru v bázi $e_1=(1,-1,0),e_2=(0,2,1),e_3=(1,1,-1)$.

**Úkol č. 2**

1) V prostoru polynomů stupně nejvýše 6 ($\mathbf{P}[6]$) nad $\mathbf{R}$ jsou dva podprostory:
$L_1=[x+1,x^2+1,2x-2x^2]$
$L_2=[1,x^2+x,x^3]$.
Nalezněte dimenzi $L_1$, $L_2$, $L_1+L_2$, $L_1\cap L_2$. Nalezněte též generátory $L_1+L_2$, $L_1\cap L_2$.

2) V prostoru $\mathbf{P}[3]$ nad $\mathbf{R}$ zvolte vektorové podprostory $L_1$ a $L_2$ tak, aby

   a) $\dim L_1=2$, $\dim L_2=2$, $\dim(L_1+L_2)=3$, najděte $L_1\cap L_2$ a jeho dimenzi;
   b) $\dim L_1=1$, $\dim L_2=3$, $\dim(L_1+L_2)=3$, najděte $L_1\cap L_2$ a jeho dimenzi;
   c) $\dim L_1=3$, $\dim L_2=0$, najděte $L_1+L_2$ a $L_1\cap L_2$ a jejich dimenze;
   d) $\dim L_1=2$, $\dim(L_1\cap L_2)=1$, najděte $L_1+L_2$ a jeho dimenzi;
   e) $\dim L_1+\dim L_2=4$, $\dim L_1-\dim L_2=1$, najděte $L_1+L_2$ a $L_1\cap L_2$ a jejich dimenze.

   Dále najděte doplňky podprostorů $L_1$, $L_2$, $L_1+L_2$ a $L_1\cap L_2$ do $\mathbf{P}[3]$. (Je třeba vypočítat alespoň dvě úlohy z částí $a$) až $e$).)

**Úkol č. 3**

1) Mějme vektorový prostor $\mathbf{R}^3$ nad $\mathbf{R}$. V něm jsou dvě báze: $(e_1,e_2,e_3)$ a $(f_1,f_2,f_3)$. Je známo, že matice přechodu od báze $(e_1,e_2,e_3)$ k bázi $(f_1,f_2,f_3)$ je $\mathbf{S}=\begin{pmatrix}1&5&2\\1&1&7\\0&-3&4\end{pmatrix}$. Nalezněte složky vektorů báze $f_1,f_2,f_3$, víte-li, že $e_1=(0,0,1)$, $e_2=(1,0,1)$, $e_3=(-1,1,0)$.
(*Pozn.:* Uvědomte si, s čím souvisí pojem matice přechodu, tzn. zda se vztahuje k transformaci bázových prvků či k transformaci složek vektoru vyjádřeného v příslušných bázích.)

2) Nechť $V_n$ je vektorový prostor dimenze $n$. Nechť $(e_1,\dots,e_n)$ je báze ve $V_n$. Ukažte, že množina $V_n\times V_n$ je též vektorový prostor s bází $(e_1,e_1),(e_1,e_2),\dots,(e_1,e_n),(e_2,e_1),(e_2,e_2),\dots,(e_2,e_n),\dots,(e_n,e_1),(e_n,e_2),\dots,(e_n,e_n)$, tj. množina všech „uspořádaných“ dvojic bázových vektorů tvoří bázi prostoru $V_n\times V_n$, a to s operací sčítání vektorů a násobení vektorů skalárem $(u+v,w)=(u,w)+(v,w)$, $(u,v+w)=(u,v)+(u,w)$, $(\alpha u,v)=\alpha(u,v)$, $(u,\beta v)=\beta(u,v)$. Jakou dimenzi má $V_n\times V_n$? Dále si vyberte nějaký $V_2$, zvolte v něm bázi a nalezněte bázi $V_2\times V_2$. Dále nalezněte reprezentaci vámi zvoleného vektoru $(u,v)$ z $V_2\times V_2$. Dále zvolte ve $V_2$ jinou bázi a nalezněte matici přechodu od původní k nové. Jaké budou složky vektoru $(u,v)$ v nové bázi? Jak byste zapsali obecně tuto transformaci?
(*Pozn.:* Dvojice $(e_i,e_j)$ se též zapisuje jako $e_i\otimes e_j$.)

**Úkol č. 4**

1) a) Uveďte příklad lineárního zobrazení $\mathrm{Mat}_{3/2}(\mathbf{C})\to\mathbf{C}$. Dokažte, že je lineární. ($\mathrm{Mat}_{3/2}(\mathbf{C})$ je množina matic řádu $3\times 2$ nad $\mathbf{C}$.)
   b) Nalezněte nějakou matici reprezentující zobrazení $\varphi:\mathbf{R}^4\to\mathbf{R}^3$ takovou, aby $\mathrm{Ker}\varphi$ mělo dimenzi 2 a aby jedním z generátorů jádra byl vektor $(1,-2,0,1)$.

2) a) Najděte jádro a obraz zobrazení $\varphi:\mathbf{P}[3]\to\mathbf{R}^3$ ($\mathbf{P}[3]$ je nad $\mathbf{R}$) takového, že $\varphi(p(x))=(p(-1),p(0),p(1))$.
   b) Jaké je jádro a obraz zobrazení $\psi:\mathbf{P}[k]\to\mathbf{P}[k]$ takového, že $\psi(p(x))=x[p(x)]'''-[p(x)]'$, $p(x)\in\mathbf{P}[k]$ nad $\mathbf{R}$? Diskutujte pro případy $k=0$, $k=1$, $k=2$, $k\geq 3$. Pro která $k$ je toto zobrazení nulové?

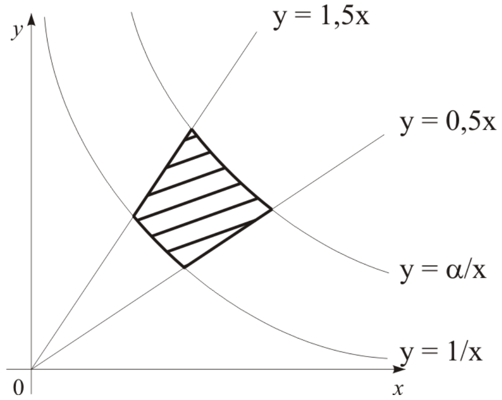
## Úkol č. 5

1) Mějme transformaci souřadnic dánu vztahem $x' = x$, $y' = \frac{1}{2}(x+y)$. Jak bude vypadat obraz čtverce (v $(x,y)$) o délce hrany 1 při této transformaci? Změní se nějak jeho obsah? Změní se nějak jeho obvod? Pokud ano, zkuste upravit transformační vztah na $x' = x$, $y' = \frac{a}{2}(x+y)$, tj. najít číslo $a$ tak, aby a) obsah čtverce zůstal zachován, b) obvod čtverce zůstal zachován.

2) Nalezněte obraz kružnice o poloměru $r = \frac{3}{2}$ se středem v bodě $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ v Žukovského transformaci dané vztahem $z \to \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ ($z$ je komplexní číslo). Načrtněte obrázek.

## Úkol č. 6

1) Nalezněte číslo $\alpha$ tak, aby plocha vyšrafovaného útvaru byla rovna 1.




2) Anuloid („kobliha“) je parametricky popsán takto:

$$
\begin{aligned}
x(r,\varphi,\phi) &= (l + r\cos\phi)\cos\varphi \\
y(r,\varphi,\phi) &= (l + r\cos\phi)\sin\varphi \\
z(r,\varphi,\phi) &= r\sin\phi,
\end{aligned}
$$

kde $r \in [0, R]$, $\varphi \in [0, 2\pi)$, $\phi \in [0, 2\pi)$. Nalezněte a) rovnice souřadnicových křivek, b) jakobián transformace od kartézských souřadnic k těmto souřadnicím, c) jakobián inverzní transformace, d) objem anuloidu, e) moment setrvačnosti kolem ose symetrie (anuloid je homogenní).

## Úkol č. 7

1) Nechť $L_1, L_2, L_3 \subseteq \mathbf{R}^4$ nad $\mathbf{R}$ jsou vektorové podprostory, $L_1 = [(1,1,0,2),(1,0,0,1)]$, $L_2 = [(-1,2,1,1),(-1,1,1,0)]$, $L_3 = [(0,1,1,2),(-1,1,1,0)]$ (vyjádřené ve standardní bázi). Nalezněte $((L_1 \cap L_2) + L_3^{\perp})^{\perp}$. ($K^{\perp}$ značí ortogonální doplněk ke $K$.)

2) Každou čtvercovou komlexní matici $\mathbf{A}$ lze zapsat ve tvaru $\mathbf{A} = \underbrace{\frac{1}{2}\left(\mathbf{A} + (\mathbf{A}^*)^T\right)}_{\mathbf{A}_H} + \underbrace{\frac{1}{2}\left(\mathbf{A} - (\mathbf{A}^*)^T\right)}_{\mathbf{A}_{aH}}$. $\mathbf{A}_H$ je hermitovská část matice $\mathbf{A}$ a $\mathbf{A}_{aH}$ je její antihermiteovská část. Nalezněte hermiteovskou část matice $\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & i \\ 0 & \alpha & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Dále zjistěte, jaké musí být číslo $\alpha$ tak, aby tato matice reprezentovala skalární součin. Pak si zvolte jedno takové $\alpha$ a nalezněte ortogonální doplněk prostoru $[(1,0,0),(0,1,0)]$ vyjádřeného v bázi, v níž je matice skalárního součinu právě $\mathbf{G}_H$.

## Úkol č. 8

1) Pomocí Gramm-Schmidtova ortogonalizačního procesu ortogonalizujte a pak normujte bázi $1+x, x, 2+x^2$ v $\mathbf{P}[2]$ nad $\mathbf{R}$ s maticí skalárního součinu $\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2) Nalezněte vlastní čísla a vlastní vektory matice $\mathbf{G}$ z části 1). Zjistěte, zda tato matice se podobná nějaké diagonální matici. Pokud ano, tak ji najděte spolu s rozkladem $\mathbf{G} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{G}_D\mathbf{S}$. Nalezněte příklad matice, která není podobná žádné diagonální maticí.

**Úkol č. 9**

1) Vyřešte počáteční úlohu:

$$(1+e^x)\,\frac{y'}{y}+e^x=0, \quad y(0)=0.$$

2) Vyřešte diferenciální rovnici:

$$(xy'-y)\cos\frac{y}{x}=x.$$

**Úkol č. 10**

1) Řeště diferenciální rovnici:

$$\frac{y'-4xy}{(2x+1)e^{2x^2}}=1, \quad y(0)=0.$$

2) Řeště diferenciální rovnici:

$$y'=\frac{4}{x}+x\sqrt{y}.$$

**Úkol č. 11**

1) Nalezněte řešení rovnice:

$$y''(x)+y(x)=\tan x.$$

2) Nalezněte funkci splňující diferenciální rovnici s okrajovými podmínkami:

$$r''(x)+r'(x)-6r(x)=e^{-3x}+xe^{-2x}, \quad r(0)=1,\, r'(0)=1.$$