Náhradní příklady z Matematiky 1

Příklad č. 1 - z 15.9.2008

1) Mějme matice $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 1 & 5 & 0 \\ 6 & -4 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -3 \\ 3 & 1 & 4 & -6 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 5 & -6 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$,
$E = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $G = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $H = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Spočtěte (je–li definováno):

a) stopy všech matic	b) $5A - 3F$	c) AFH
d) $(BE)^T G$	e) $\mathrm{Tr}(BE)$	f) $F^3 = FFF$
g) $3(AC + FC)$	h) platí $AF = FA$?	i) $E^T E + EE^T$
j) $\mathrm{Tr}(HB^T)$	k) $\mathrm{Tr}(C^T AC)$	l) $G^T DE - 3B$
m) $2(C^T F) + 3(BD^T)$		

2) Dokažte **obecně** (tj. ne pro konkrétní případ, ale pro případ obecný), že pro matice A, B, C, D, E vhodného typu platí $A.(B + C) = A.B + A.C$, $\mathrm{Tr}(D.E) = \mathrm{Tr}(E.D)$.

3) Nalezněte matici A typu 2×2 tak, aby $A^2 = A.A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Příklad č. 2 - z 22.9.2008

1) Určete řešení následující soustavy pomocí Gaussovy eliminační metody:

$$\begin{aligned} 2x + y - 4z &= 0 \\ 3x + 5y - 7z &= 0 \\ 4x - 5y - 6z &= 0 \\ 7x - 13z &= 0. \end{aligned}$$

2) Vyřeště následující soustavu vzhledem k parametrům a, b:

$$\begin{aligned} ax + y - 2z &= 1 \\ x - y + z &= 0 \\ (1 + a)y - z &= b. \end{aligned}$$

3) Určete vzájemnou polohu tří rovin vzhledem k parametru a:
$\rho : 2x + y - z + a = 0$, $\sigma : 2y + 3z - a = 0$, $\tau : 6x + 5y + a = 0$.

Příklad č. 3 - z 29.9.2008

1) Ke dvojici rovin $\rho_1 : 3x + y - 1 = 0$, $\rho_2 : y + z + 3 = 0$ nalezněte třetí rovinu ρ_3 tak, aby se všechny tři roviny a) protínaly v jednom bodě, b) měly společnou přímku, c) neměly žádný společný bod.

2) Komplexní číslo z je možno vyjádřit v algebraickém tvaru $z = x + iy$ nebo ve tvaru goniometrickém $z = r\cos\varphi + ir\sin\varphi$. Nalezněte transformační vztahy mezi (x, y) a (r, φ), tj. nalezněte $x(r, \varphi)$, $y(r, \varphi)$ a $r(x, y)$, $\varphi(x, y)$. Načrtněte Gaussovu rovinu a v ní bod reprezentující libovolné komplexní číslo. Jaký je geometrický význam symbolů x, y, r, φ?

3) Nalezněte algebraický tvar komplexních čísel $\frac{1+i}{1-i} + \left(\frac{3-2i}{1+i}\right)^2$; $(1 + i)^4$; $\sqrt{1 + i}$.

Příklad č. 4 - z 6.10.2008

1) Najděte inverzi k následující matici řádu n:

$$\begin{pmatrix} 2-n & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2-n & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2-n & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 2-n & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 2-n & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 2-n \end{pmatrix}.$$

2) Ukažte, že platí $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$ pro libovolnou regulární matici A.

Příklad č. 5 - z 13.10.2008

Mějme matici $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$.

1) Tato matice není regulární (tj. nemá inverzi). Přesto je možno nalézt k ní matici $\bar{A}$ řádu 2×3 takovou, že $\bar{A}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Takováto matice se nazývá *zobecněnou inverzní (g–inverzní) maticí* k matici A. Nalezněte ji.

2) Platí pro g–inverzní matice totéž co pro inverzní matice, totiž že $A\bar{A} = \bar{A}A$? Zdůvodněte.

3) Lze nalézt i matici $\bar{A}'$ takovou, že $A\bar{A}'$? Zdůvodněte.

4) Jak by vypadala g–inverzní matice k matici $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$?

Příklad č. 6 - z 20.10.2008

1) Určete definiční obor a obor hodnot funkcí a) $\log_{10}(x^2-4)$, b) $\log_{10}(x+2)+\log_{10}(x-2)$ c) $\sqrt{\sin(\sqrt{x})}$.

2) Najděte inverzní funkci funkcí a) $\frac{x^2}{x+1}$, b) $\sqrt[4]{\ln(\tan x)}$.

3) V trojúhelníku ABC je délka strany AB je 6 cm, délka strany AC je 8 cm, úhel $\sphericalangle BAC$ je x. Vyjádřete délku a délku strany BC a obsah S trojúhelníku ABC jako funkci x. Dokažte si obecnou platnost kosinovy věty.

Příklad č. 7 - z 3.11.2008

1) Vyjádřete polynom $x^5 - 4x^3 + 2x - 3$ v součinovém tvaru.

2) a) Vyjádřete racionální funkci $\frac{x^6-x^5+2x^4-3x^2-x+1}{2x^2-x+3}$ jako součet polynomu a ryze lomené funkce.

   b) Převeďte na parciální zlomky $\frac{x^4+x^3-15x^2+31x+4}{x^5-3x^4-2x^3+6x^2+x-3}$.

3) Vypočtěte limity: a) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}$, b) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$, c) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{\tan x}{x}+1\right)$.

Příklad č. 8 - z 10.11.2008

1) Derivujte funkce $\frac{3\sin^2 x+1}{\sqrt{\cos x}}$; $(\sin x)^{\cos x} + (\cos x)^x$; $(1+x+x^2+x^3)^{10} \arcsin \frac{2x}{x^2+1}$.

2) Hypergeometrické funkce jsou definovány takto: $\sinh x = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$, $\cosh x = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$, $\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$, $\mathrm{cotanh} x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$. Ukažte, že $(\sinh x)' = \cosh x$, $(\cosh x)' = \sinh x$, $(\tanh x)' = \frac{1}{\cosh^2 x}$, $(\mathrm{cotanh} x)' = \frac{1}{\sinh^2 x}$.

Příklad č. 9 - z 24.11.2008

1) Vypočtěte limity $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^x+x\right)^{\frac{1}{x}}$; $\lim\limits_{x\to 0}\left(\text{cotan}x-\frac{1}{x}\right)$.

2) Pomocí diferenciálu vypočtěte přibližnou hodnotu výrazu $\frac{2}{\sqrt{8{,}99}}$; $\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}-\sin(46°)}{\frac{\sqrt{2}}{2}-\cos(46°)}$.

3)* *(Není povinná část b))* a) Zjistěte, jak se chová funkce $(1+x)^n$ v okolí bodu $x=0$. b) Aplikujte tento výsledek na aproximativní vyjádření funkce $\frac{1}{[(x-x_0)+(y-y_0)]^{\frac{3}{2}}}$ pro body R_0 takové, že $R_0 \gg r$ $\left(\text{ tj. } \frac{r}{R_0} \ll 1\right)$, kde $R_0^2 = x_0^2 + y_0^2$, $r^2 = x^2 + y^2$.

Příklad č. 10 - z 1.12.2008

1) Vyšetřete průběh funkce $f(x) = x + e^{-x}$.

2) Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \frac{(x-a)^3}{(x+1)^2}$, kde a je reálný parametr.

Příklad č. 11 - z 8.12.2008

1) Vypočtěte: $\int x^4\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x$; $\int \frac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)}\,\mathrm{d}x$.

2) Vypočtěte plochu omezenou osou x a křivkou $\frac{1}{x(1+2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}$ na intervalu $[1,2]$.

3) Metodou per partes vypočtěte $\int\limits_0^{\sqrt{3}} x\arctan x\,\mathrm{d}x$.