Náhradní příklady z Matematiky 2

Příklad č. 1

1) Jsou vektory $(1,2,0,1),(2,-1,0,1),(-3,3,2,-1),(2,3,2,1)$ lineárně nezávislé?

2) Určete souřadnice polynomu x^2-x^3 v bázi $[1+2x-3x^2, 1+x^2-x^3, x-2x^2+x^3, 3+x+2x^2-x^3]$.

Příklad č. 2

1) Nechť V_n je vektorový prostor dimenze n a $L_1, L_2 \subseteq V_n$ jsou vektorové podprostory ve V_n. Definujte množiny L_1+L_2 a $L_1 \cap L_2$. Dokažte, že jsou to též vektorové podprostory ve V_n. Dále nechť $\dim L_1 = l_1$ a $\dim L_2 = l_2$. Jaké vztahy musí platit mezi l_1, l_2 a n?

2) Mějme vektorový prostor $\mathbf{R}^4$ nad $\mathbf{Z}$ a nechť $L_1 = [(2,3,1,0)]$, $L_2 = [(1,0,-1,0)]$, $L_3 = [(3,3,0,1),(1,3,2,a)]$. Nalezněte a tak, aby $((L_1+L_2)\cap L_3)+L_1 = [(0,-3,-3,0),(1,0,-1,0)]$.

Příklad č. 3

1) Ve vektorovém prostoru $\mathbf{R}^4$ nad $\mathbf{R}$ máme dvě báze: $e_1=(1,0,0,0), e_2=(0,1,0,0), e_3=(0,0,0,1), e_4=(0,0,1,0)$ a $\bar{e}_1=(1,2,0,1), \bar{e}_2=(-3,0,1,0), \bar{e}_3=(2,1,-1,2), \bar{e}_4=(0,0,1,-1)$. Nechť v bázi e_1,e_2,e_3,e_4 jsou souřadnice vektoru a $(1,-1,1,-1)$. Nalezněte matici přechodu a s její pomocí nalezněte reprezentaci vektoru a v bázi $\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3,\bar{e}_4$.

2) Jak se změní složky vektoru a v příkladu 1), jestliže zaměníme pořadí původních vektorů e_3 a e_4? Změní se vůbec něco? Závisí tedy obecně reprezentace vektoru v bázi na pořadí prvků báze? Co by se stalo, kdyby byly v matici přechodu dva řádky totožné?

Příklad č. 4

1) a) Najděte jádro a obraz zobrazení $\varphi: \mathbf{P}[3] \to \mathbf{P}[4]$ dané předpisem $\varphi(p(x)) = 2p'(x) + \int p(x)\,\mathrm{d}x$.
   b) Nechť $\varphi : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ je lineární zobrazení z vektorového prostoru $\mathbf{R}^2$ nad $\mathbf{R}$ do sebe. Nechť je φ reprezentováno maticí $\mathbf{A}$. Nalezněte všechny reprezentace lineárních zobrazení φ (tj. nalezněte všechny matice $\mathbf{A}$), pro něž je $\varphi \circ \varphi = \mathrm{id}$.

2) Nalezněte příklad zobrazení, pro nějž
   a) $\operatorname{Ker}\varphi = [(1,0,2),(1,-1,0)]$,
   b) $\operatorname{Im}\varphi = [1+x]$, $\operatorname{Ker}\varphi = [1+2x, 1-x+x^2]$.

Příklad č. 5

1) Doplňte chybějící údaje v kartézských a sférických souřadnicích: $x=2$, $\varphi=\frac{\pi}{3}$, $z=5$.

2) Nalezněte obraz množiny $M = \{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \,|\, y=x^2\}$ v polárních souřadnicích.

Příklad č. 6

1) Nalezněte rovnici spirály ve sférických souřadnicích. (Spirála je křivka, jež je v kartézských souřadnicích dána parametricky $x(t)=a\cos t$, $y(t)=a\sin t$, $z(t)=bt$, kde a,b jsou konstanty, t je parametr).

2) Země má přibližně tvar koule. Její hustota však není rovnoměrně rozložena. Průměrná hustota zemské kůry činí $3\,000\,\mathrm{kg.m^{-3}}$, hustota jádra se odhaduje na $11\,000$–$17\,000\,\mathrm{kg.m^{-3}}$. Za předpokladu, že se hustota mění spojitě a lineárně od povrchu ke středu, vypočtěte hmotnost Země. Která z hodnot $11\,000$–$17\,000\,\mathrm{kg.m^{-3}}$ je nejblíže skutečnosti, jestliže se uvádí hmotnost Země $5,97.10^{24}\,\mathrm{kg}$? Počítejte s poloměrem Země $6\,378\,\mathrm{km}$.

Příklad č. 7

1) V $\mathbf{P}[2]$ nad $\mathbf{R}$ je skalární součin definován jako $(p,q)=\int_0^1 p(x)q(x)\,\mathrm{d}x$ (pro $p,q\in\mathbf{P}[2]$). Nalezněte ortogonální doplněk podprostoru generovaného polynomem, jež je reprezentován v bázi $1+x^2, x, 1+x$ vektorem $(1,1,1)$, pomocí matice skalárního součinu.

2) Nalezněte příklad báze, v níž jsou vektory $\mathbf{u}=(1,2)$ a $\mathbf{v}=(3,4)$ ortogonální.

Příklad č. 8

1) V $\mathbf{R}^3$ najděte podprostor vlastních vektorů příslušných vlastní hodnotě $\lambda = 3$:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

2) Uveďte příklad lineárního zobrazení reprezentovaného nediagonální maticí, která má vlastní čísla i, $-i$, $0, 1$. Určete podprostory příslušné těmto vlastním číslům.

Příklad č. 9

1) Vyřešte diferenciální rovnici:

$$2y'(2 - 2y + x) + 2y - x - 3 = 0, \quad y(0) = 1.$$

2) Vyřešte diferenciální rovnici:

$$z - z^2 + \xi z' = 0.$$

Příklad č. 10

1) Vyřešte diferenciální rovnici:

$$z'(u) \cos u = (z(u) + 2 \cos u) \sin u.$$

2) Vyřešte diferenciální rovnici:

$$y' = (x - y^2)^{-1}.$$

Příklad č. 11

1) Řešte diferenciální rovnici:

$$y'' - 2y' = 2 \cos 2x, \qquad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1,\ y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2.$$

2) Nalezněte řešení diferenciální rovnice popisující pohyb tlumeného harmonického oscilátoru buzeného výslednou vnější sílou $F(t)$.