

# F1031 Matematika o krok napřed

## 1. Vektory a práce s nimi

### Úloha 1.

Vektory  $\vec{u} \dots (1, -3, 0)$ ,  $\vec{v} \dots (-4, 3, -1)$ ,  $\vec{w} \dots (0, -2, 3)$  jsou zadány svými složkami v ortonormální bázi  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ . Určete složky vektorů  $\vec{a} = -2\vec{u} + 3\vec{v} - 4\vec{w}$  a  $\vec{b} = 3\vec{u} - \vec{v} - 2\vec{w}$  v téže bázi. Vypočtěte skalární součin  $\vec{a}\vec{b}$ . Vypočtěte složky vektorových součinů  $\vec{a} \times \vec{b}$  a  $\vec{b} \times \vec{a}$  v bázi  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ .

### Úloha 2.

Výpočtem ve složkách v ortonormální bázi dokažte, že platí  $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a}\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}\vec{b})\vec{c}$ . Obdobně vyjádřete  $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$ .

### Úloha 3.

Určete úhel, který svírají vektory  $\vec{a} = 3\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3$  a  $\vec{b} = -\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3$ , jestliže vektory  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  tvoří ortonormální bázi.

### Úloha 4.

Systém vektorů se nazývá lineárně závislým, jestliže některý z vektorů systému je lineární kombinací ostatních. (Nejvyšší počet lineárně nezávislých vektorů v prostoru dimenze 1, resp. 2, resp. 3 je 1, resp. 2, resp. 3.) Rozhodněte, zda vektory  $\vec{u} \dots (-1, 2, 4)$ ,  $\vec{v} \dots (-3, -2, 5)$ ,  $\vec{w} = (-3, -10, -2)$  jsou lineárně závislé. V kladném případě запиšte jeden z nich jako lineární kombinaci dvou zbývajících.

## 2. Matematika "nekonečně malého": skalární a vektorové funkce, limity, derivování -- od trajektorie ke zrychlení.

### Úloha 1.

Určete definiční obor funkce  $f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x + 1}$ . Vypočtěte  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x + 1}$ . Nakreslete graf této funkce na množině  $[-2, -1) \cup (-1, 4]$ .

### Úloha 2.

Vyjádřete rovnice tečen ke grafu funkce zadané v úloze 1. v bodech  $x_1 = 2$  a  $x_2 = \frac{3}{2}$ .

### Úloha 3.

Vypočtěte derivaci funkcí  $f(x) = \frac{2\sin^2 x}{x^2 + 1} - \sqrt{1 - x^2}$  a  $g(x) = \ln \sqrt{1 + \sqrt{1 + x^2}}$ .