Poznámky:

(a) Komutační relace (90) v 7.postulátu,odrážejí nám již známou skutečnost, že některé veličiny nelze současně změřit (tím se rozumí změřit jednu a nezměnit tímto měřením druhou). Nebo jinak: komutační relace (90) jsou jinou formou vyjádření Heisenbergových relací neurčitosti. Veličiny zobrazené komutujícími operátory lze současně změřit.K této otázce se ještě vrátíme v odst.3.3.

(b) V první části 7.postulátu se předpokládá, že operátory pro souřadnice a impulsy, tj $\mathcal{Q}_1,\ldots,\mathcal{Q}_n$, $\mathcal{P}_1,\ldots,\mathcal{P}_n$, známe. K jejich nalezení nám mohou posloužit opět komutační relace (90); jak, uvidíme v odst.3.1.

(c) Postulát pochopitelně dává jen návod, jak získat operátory zobrazující veličiny definované v klasické mechanice. Jsou však i <u>veličiny, které nemají klasickou analogii</u>. Potom je třeba <u>definovat přímo</u> odpovídající <u>operátor</u> tak, aby výsledky získané s jeho pomocí byly v souladu s experimentem. Na příkladu spinu to uvidíme v následující kapitole.

(d) Symetrizace výrazů

Někdy se může stát, že klasický definiční vztah pro A obsahuje členy, které by vedly k nejednoznačnému určení operátoru. Důvod je v tom, že zatímco klasické souřadnice a impulsy komutují, odpovídající operátory komutovat nemusí. Tak se např. v klasickém výrazu může vyskytovat součin Q_iP_i ($= P_iQ_i$). Podle (90) ovšem odpovídající operátory nekomutují, tj

$$\mathcal{Q}_i \mathcal{P}_i \neq \mathcal{P}_i \mathcal{Q}_i$$

Co tedy dosadit za klasický výraz Q_iP_i ? Postup je takový, že <u>místo Q_iP_i napíšeme symetrický výraz</u>

$$\frac{1}{2} (Q_iP_i + P_iQ_i)$$

a v něm teprve provedeme náhradu za operátory. V klasickém výrazu pro A se provedením symetrizace nic nezměnilo a kvantové operátory jsou již určeny jednoznačně.

3. Některé závěry plynoucí z postulátů

3.1) Souřadnicová a impulsová reprezentace

V poznámce (b) k 7.postulátu jsme se již zmínili, že postulované komutační relace (90) nám mohou pomoci při stanovení základních operátorů pro souřadnice $Q_1,\ldots,Q_n$ a impulsy $P_1,\ldots P_n$. Jedna z možností je, <u>zvolit za operátory souřadnic $\mathcal{Q}_1,\ldots,\mathcal{Q}_n$ přímo souřadnice</u> $Q_1,\ldots,Q_n$ a operátory $\mathcal{P}_1,\ldots,\mathcal{P}_n$ určit pak tak, aby byly splněny komutační relace (90). Využijeme-li výsledek (13), je zřejmě možné zobrazit operátory souřadnic a impulsů takto:

Klasická veličina	Operátor
Q_i	Q_i
P_i	$-i\hbar \frac{\partial}{\partial Q_i}$

$$(i=1,2,\dots,n) \qquad (91)$$

Ostatní operátory pak již hledáme podle návodu, který dává 7.postulát. Volba operátorů (91) vede k tzv souřadnicové reprezentaci kvantové mechaniky. Protože diferenciální operátory mohou působit jen na funkce proměnných $Q_1,\dots,Q_n$, budou v této reprezentaci stavové vektory reprezentovány vlnovými funkcemi

$$\psi = \psi(Q_1,\dots,Q_n;t) \qquad (92)$$

Jestliže volbu obrátíme, tj za operátory impulsů $\mathcal{P}_1,\dots,\mathcal{P}_n$ zvolíme přímo $P_1,\dots,P_n$, potom z komutačních relací dostaneme obdobu výrazů (91)

Klasická veličina	Operátor
P_i	P_i
Q_i	$i\hbar \frac{\partial}{\partial P_i}$

$$(i=1,2,\dots,n) \qquad (93)$$

Volba (93) nás přivede k tzv impulsové reprezentaci. Stavové vektory $|\psi\rangle \in \mathcal{E}$ v ní budou reprezentovány funkcemi

$$\psi = \psi(P_1,\dots,P_n;t) \qquad (94)$$

Souřadnicová reprezentace je (především při řešení konkrétních úloh) nejčastěji používanou reprezentací aparátu kvantové mechaniky. Všimneme si jí proto blíže; uvidíme, že nás dovede i ke Schrödingerově rovnici, s níž umíme pracovat již z kap.III.

Pro soustavu tvořenou jednou částicí s polohovým vektorem $\vec{r} = (x,y,z)$ a impulsem $\vec{p} = (p_x,p_y,p_z)$ (srov.(84)) bude

$$\hat{x} = x \ , \quad \hat{y} = y \ , \quad \hat{z} = z \qquad (95a)$$

takže operátor polohového vektoru

$$\hat{\vec{r}} = (\hat{x},\hat{y},\hat{z}) \quad \text{bude} \quad \vec{r} = (x,y,z) \qquad (95b)$$

Složky vektoru impulsu $\vec{p}$ budou podle (91) reprezentovány operátory

$$\hat{p}_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \ , \quad \hat{p}_y = -i\hbar \frac{\partial}{\partial y} \ , \quad \hat{p}_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial z} \qquad (96a)$$

a operátor impulsu (vektoru) tudíž bude

$$\hat{\vec{p}} = \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \ , -i\hbar \frac{\partial}{\partial y} \ , -i\hbar \frac{\partial}{\partial z} \right) \qquad (96b)$$

Vzpomeneme-li si na diferenciální operátor ∇ (nabla) (dod.E) , můžeme operátor impulsu (96b) zapsat

$$\boxed{\hat{\vec{p}} = -i\hbar\nabla} \tag{96c}$$

Nyní již snadno podle 7.postulátu získáme další operátory v souřadnicové reprezentaci. Tak např.

(i) operátor kinetické energie pro jednu částici dostaneme tak, že v (84) nahradíme p_x, p_y, p_z operátory (96):

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2m}|\hat{\vec{p}}|^2 = \frac{1}{2m}\hat{\vec{p}}.\hat{\vec{p}} = \frac{1}{2m}(-i\hbar)^2\,\nabla.\nabla = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 \tag{97}$$

kde $\nabla^2 = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ je tzv Laplaceův operátor (dod.E).

Pro částici pohybující se jen po přímce (zvolíme ji za osu x;srov. kap.III)

$$\mathcal{T} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} \tag{98}$$

(ii) operátor potenciální energie (87) pro jednu částici bude přímo funkce V(x,y,z), tj

$$\mathcal{V} = V(x,y,z) \tag{99}$$

(iii) operátor celkové energie - hamiltonián - pak je

$$\boxed{\mathcal{H} = \mathcal{T} + \mathcal{V} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(x,y,z;t)} \tag{100}$$

Pro jednorozměrný,stacionární případ se redukuje na

$$\mathcal{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V(x) \tag{101}$$

Stavové vektory $|\psi(t)\rangle$ jsou reprezentovány vlnovou funkcí

$$\psi = \psi(x,y,z;t) \tag{102}$$

Časový vývoj stavu soustavy je podle 6.postulátu určován řešením Schrödingerovy rovnice

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \mathcal{H}\psi \tag{103a}$$

nebo v rozepsaném tvaru, po dosazení za $\mathcal{H}$

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(x,y,z;t)\right]\psi \tag{103b}$$

Vidíme, že skutečně získáváme Schrödingerovu rovnici (na níž byla zbudována Schrödingerova vlnová mechanika;srov.kap.III) pouze jako dílčí výsledek z obecného formalismu kvantové teorie.

Pro úplnost si ještě uveďme hamiltonián pro částici v elektromagnetickém poli. Zde se situace poněkud komplikuje tím, že magnetické pole není potenciální (nelze ho popsat jen skalárním potenciálem U), takže potenciální energie částice nejde zapsat v jednoduchém tvaru (87).

V klasické elektrodynamice se dokazuje, že klasická Hamiltonova funkce pro částici s nábojem q v elektromagnetickém poli je

$$H(\vec{r},\vec{P}) = \frac{1}{2m}\left[\vec{P} - q\vec{A}(\vec{r},t)\right]^2 + qU(\vec{r},t) \qquad (104)$$

kde $U(\vec{r},t)$ je skalární potenciál elektrického pole,
$\vec{A}(\vec{r},t)$ je tzv vektorový potenciál magnetického pole a

$$\vec{P} = m\frac{d\vec{r}}{dt} + q\vec{A}(\vec{r},t) = m\vec{v} + q\vec{A}(\vec{r},t) \qquad (105)$$

je zobecněný impuls (kanonicky sdružený s $\vec{r}$).
Při přechodu ke kvantověmechanickému operátoru musíme nahradit tento zobecněný impuls $\vec{P}$ operátorem impulsu $\vec{\mathcal{P}}$, nikoliv mechanický impuls $\vec{p} = m\,d\vec{r}/dt = m\vec{v}$! Skutečnost, že dvojice Q_i, P_i jsou kanonicky sdružené měla být, přesně vzato, uvedena v 7.postulátu, neboť právě těchto dvojic se týkají komutační relace (90).
Kvantověmechanický hamiltonián $\mathcal{H}$ získáme z (104)

$$\mathcal{H}(\vec{\mathcal{R}},\vec{\mathcal{P}}) = \frac{1}{2m}\left[\vec{\mathcal{P}} - q\vec{A}(\vec{\mathcal{R}},t)\right]^2 + V(\vec{\mathcal{R}},t) \qquad (105)$$

kde $V(\vec{\mathcal{R}},t) = q\,U(\vec{\mathcal{R}},t)$,
$\vec{\mathcal{R}}$ je operátor polohového vektoru a
$\vec{\mathcal{P}}$ je operátor zobecněného impulsu (105).

Pro operátory $\vec{\mathcal{R}} = (\mathcal{X},\mathcal{Y},\mathcal{Z})$, $\vec{\mathcal{P}} = (\mathcal{P}_x, \mathcal{P}_y, \mathcal{P}_z)$ platí komutační relace (90)

$$[\mathcal{X},\mathcal{P}_x] = i\hbar \;,\quad [\mathcal{Y},\mathcal{P}_y] = i\hbar \;,\quad [\mathcal{Z},\mathcal{P}_z] = i\hbar \;, \qquad (106)$$

všechny zbývající komutátory jsou rovny nule. V souřadnicové reprezentaci přejde (105) v

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m}\left[-i\hbar\nabla - q\vec{A}(\vec{r},t)\right]^2 + V(\vec{r},t) \qquad (107)$$

a Schrödingerova rovnice je

$$i\hbar\frac{\partial\psi(\vec{r},t)}{\partial t} = \frac{1}{2m}\left(-i\hbar\nabla - q\vec{A}(\vec{r},t)\right)^2\psi(\vec{r},t) + V(\vec{r},t)\,\psi(\vec{r},t) \qquad (108)$$

Na pravé straně této rovnice znamená $(-i\hbar\nabla - q\vec{A})^2\psi$ toto:

$(-i\hbar\nabla - q\vec{A})(-i\hbar\nabla - q\vec{A})\,\psi(\vec{r},t) =$

$$= -\hbar^2 \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + iq\hbar\left[A_x \frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}(A_x\psi)\right] + q^2A_x^2\psi +$$

+[další dva výrazy, které se získají z tohoto záměnou x za y a za z]. Musíme totiž brát v úvahu, že složky operátoru ∇ a operátoru $\vec{A}(\vec{r},t)$ obecně nekomutují.

3.2) Střední hodnota

Závěry, které vyplývají z úvodních postulátů, mají pravděpodobnostní charakter. Abychom je ověřili, musíme provést velký počet měření, při naprosto identických podmínkách. Jinak řečeno, měli bychom měřit tutéž veličinu na velkém počtu soustav, které jsou v témže kvantovém stavu (přísluší jim stejný ket-vektor $|\psi\rangle$).

Uvažujme tedy soubor tvořený N identickými soustavami, přičemž všechny jsou v nějakém normalizovaném kvantovém stavu $|\psi\rangle$. Představme si dále, že v témže časovém okamžiku, provedeme na všech těchto soustavách měření nějaké veličiny A (např. celkové energie). Podle 3.postulátu může být výsledkem každého z N provedených měření pouze některá z vlastních hodnot $a_1, a_2, \dots$ operátoru $\mathcal{A}$, který zobrazuje měřenou veličinu A. Nechť jsme

N_1	-krát	naměřili	hodnotu	a_1
N_2	-krát	"	"	a_2
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
N_i	-krát	"	"	a_i
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

přičemž musí být

$N_1 + N_2 + \dots + N_i + \dots = N$ (=celkový počet)

Aritmetický střed $\bar{A}$ z výsledků měření vypočteme běžným způsobem

$$\bar{A} = \frac{N_1a_1 + N_2a_2 + \dots + N_ia_i + \dots}{N} =$$

$$= \frac{N_1}{N}a_1 + \frac{N_2}{N}a_2 + \dots + \frac{N_i}{N}a_i + \dots \tag{110}$$

Pro velký počet měření ($N \to \infty$) se poměr N_n/N (n=1,2,....) blíží pravděpodobnosti naměření hodnoty a_n, tj

$$P(a_n) = \lim_{N\to\infty} \frac{N_n}{N} \tag{111}$$

Podle 4.postulátu je však tato pravděpodobnost rovna výrazu (73)

$$P(a_n) = \sum_{i=1}^{g_n} |\langle\psi|u_n^{(i)}\rangle|^2 = \sum_{i=1}^{g_n} \langle\psi|u_n^{(i)}\rangle\langle u_n^{(i)}|\psi\rangle$$

takže pro $N \to \infty$ můžeme <u>střední hodnotu $\langle A\rangle$ z měřené veličiny A</u>, zapsat takto

$$\langle A\rangle = \sum_n P(a_n)\, a_n = \sum_n \sum_{i=1}^{g_n} \langle\psi|u_n^{(i)}\rangle\langle u_n^{(i)}|\psi\rangle\, a_n \tag{112}$$

Protože (a_n je reálné číslo)

$$\langle\psi|u_n^{(i)}\rangle\, a_n = \langle\psi|a_n|u_n^{(i)}\rangle \quad \text{a podle (72)}$$

$$\mathcal{A}\,|u_n^{(i)}\rangle = a_n\,|u_n^{(i)}\rangle \qquad (i=1,2,\ldots,g_n)\,,$$

můžeme (112) přepsat

$$\langle A\rangle = \sum_n \sum_{i=1}^{g_n} \langle\psi|\mathcal{A}|u_n^{(i)}\rangle\langle u_n^{(i)}|\psi\rangle =$$

$$= \langle\psi|\mathcal{A}\Big(\sum_n \sum_{i=1}^{g_n} |u_n^{(i)}\rangle\langle u_n^{(i)}|\Big)|\psi\rangle$$

Výraz v závorkách je roven jednotkovému operátoru (viz podmínky úplnosti (50)), takže konečně dostáváme pro <u>střední hodnotu</u> z velkého počtu měření <u>veličiny A</u> výraz

$$\langle A\rangle = \langle\psi|\mathcal{A}|\psi\rangle \tag{113a}$$

<u>Pro nenormalizovaný stav $|\psi\rangle$</u> je třeba (113a) ještě dělit normou ,
takže

$$\boxed{\langle A\rangle = \frac{\langle\psi|\mathcal{A}|\psi\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle}} \tag{113b}$$

Poznamenejme, že se někdy formule (113), pro střední hodnotu $\langle A\rangle$, postuluje místo námi uvedeného 4.postulátu. Fyzikální interpretace koeficientů rozvoje podle úplného souboru stavových vektorů (která byla obsahem 4.postulátu) se pak naopak získá jako důsledek, který z tohoto postulátu vyplyne.

3.3) Současná měřitelnost a úplný soubor kvantových čísel

Položme si nyní otázku, která se nikdy neobjevila v klasické mechanice, ale podle toho co již víme, má zřejmě zásadní význam v kvantové mechanice: za jakých podmínek je možné současně stanovit přesné numerické hodnoty dvou různých měřitelných veličin ? Vyjádřeno z hlediska realizace experimentu: měření 1.veličiny, řekněme A, převede podle

5.postulátu soustavu do určitého stavu, v němž má A hodnotu, řekněme, a_i (jedna z vlastních hodnot $\mathcal{A}$). Jestliže nyní provedeme na soustavě měření druhé veličiny B, bude soustava ve stavu, v němž má B naměřenou hodnotu, kterou označíme b_j (jedna z vlastních hodnot $\mathcal{B}$). Otázka nyní zní: když budeme nyní na soustavě měřit znovu veličinu A, dostaneme opět hodnotu a_i ? Jestliže ano, budeme říkat, že <u>veličiny</u> A,B jsou <u>současně měřitelné</u>.

Podívejme se nyní na tento problém z hlediska matematického formalismu kvantové mechaniky. Nechť <u>operátory $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$</u> (zobrazující veličiny A,B) <u>mají</u> ve stavu, který vedl k naměření hodnot a_i, b_j <u>společný vlastní stavový vektor</u> $|a_i, b_j\rangle$, takže platí

$$\mathcal{A}|a_i,b_j\rangle = a_i|a_i,b_j\rangle \quad , \quad \mathcal{B}|a_i,b_j\rangle = b_j|a_i,b_j\rangle \qquad (114)$$

<u>Rozlišování vlastních vektorů pomocí</u> odpovídajících <u>vlastních hodnot</u> , které jsme zde použili, je v kvantové mechanice běžné. Zpravidla se ovšem nevypisují celé vlastní hodnoty, ale opět jen nějaké veličiny - - <u>kvantová čísla</u> - které je rozlišují. Tak místo $|a_i,b_j\rangle$ by se mohlo psát $|i,j\rangle$ s tím, že kvantové číslo na 1.pozici (zde "i") přísluší vlastní hodnotě $\mathcal{A}$ a číslo na 2.pozici (zde "j") pak vlastní hodnotě $\mathcal{B}$.

Fyzikální smysl rovnic (114) je následující: jestliže se soustava v daném časovém okamžiku nachází ve stavu $|a_i,b_j\rangle$, potom měření veličin A,B dá určitě hodnoty a_i,b_j. Nutnou podmínkou pro současnou platnost obou rovnic (114) je

$$(\mathcal{A}\mathcal{B} - \mathcal{B}\mathcal{A})|a_i,b_j\rangle \equiv [\mathcal{A},\mathcal{B}]|a_i,b_j\rangle = 0 \qquad (115)$$

což znamená, že $|a_i,b_j\rangle$ je vlastním vektorem operátoru $[\mathcal{A},\mathcal{B}]$ a přísluší mu vlastní hodnota 0.

Z druhé strany, rovnice (115) je automaticky splněna, <u>jestliže operátory $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ komutují</u>. V tomto případě <u>platí důležitá věta</u>:

Jestliže dva operátory komutují, potom lze pro ně najít společný úplný soubor ortonormálních vlastních vektorů.

<u>Platí i věta obrácená</u>:

Mají-li dva operátory společný úplný soubor vlastních vektorů, potom komutují.

Obě věty lze poměrně snadno dokázat, jestliže všechny vlastní hodnoty obou operátorů jsou nedegenerované; v opačném případě je rozbor a důkaz komplikovanější. Nebudeme důkazy provádět (viz např.[11],[13]), ale všimneme si fyzikálních důsledků, které z vět plynou.

Mějme operátor $\mathcal{A}$, zobrazující nějakou veličinu, kterou je možné na dané soustavě změřit. Víme již, že množina jeho vlastních vektorů tvoří úplný soubor, který můžeme použít za bázi v prostoru stavových vektorů $\mathcal{E}$. Obecně však výběr vlastních vektorů není jednoznačný;

vzpomeňme si, že výběr ortonormálních vektorů v podprostoru $\mathcal{E}_{n}$, spojeném s degenerovanou vlastní hodnotou a_n (obr.45), nebyl jednoznačně určen.

Mějme nyní druhou měřitelnou veličinu B, zobrazenou operátorem $\mathcal{B}$, který komutuje s $\mathcal{A}$. Může se nyní stát, že společný soubor vlastních vektorů (jehož existence plyne z výše uvedené věty) už bude jediný. Ne každý vlastní vektor $|a_n\rangle$ z těch, které patřily k degenerované vlastní hodnotě a_n, musí být též vlastním vektorem $\mathcal{B}$. Z uvedené věty však plyne, že v podprostoru $\mathcal{E}_n$ lze vždy vybrat takové ortonormální vektory, které budou též vlastními vektory $\mathcal{B}$. Sestrojujeme-li tedy společný systém ortonormálních vlastních vektorů pro komutující operátory $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ - rozlišujeme je nyní dvěma vlastními hodnotami : a_i, b_j - může přibrání operátoru $\mathcal{B}$ omezit možnosti výběru těchto vektorů v podprostorech, které příslušely k degenerovaným vlastním hodnotám operátoru $\mathcal{A}$.

Jestliže je soubor vlastních vektorů dvou komutujících operátorů $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ již určen jednoznačně, potom říkáme, že operátory $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ tvoří úplný soubor komutujících operátorů.

Jestliže $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ ještě nemají jednoznačně určený společný úplný soubor ortonormálních vlastních vektorů, musíme přibrat další operátor $\mathcal{C}$, který komutuje s $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ a znovu konstruovat společný soubor vlastních vektorů $|a_i, b_j, c_k\rangle$ pro trojici $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$. Tuto proceduru (přibírání dalších komutujících operátorů) budeme opakovat tak dlouho, až společný soubor vlastních vektorů bude určen jednoznačně.

Obecně se říká, že

hermitovské operátory $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, ..., $\mathcal{L}$ tvoří úplný soubor komutujících operátorů, jestliže mají společný soubor ortonormálních vlastních vektorů a tento soubor je jediný.

Měřitelné veličiny reprezentované úplným souborem komutujících operátorů tvoří úplný soubor současně měřitelných veličin.

Provedeme-li současné změření těchto veličin, potom stav soustavy bude jednoznačně určen stavovým vektorem $|a_i, b_j, c_k, \ldots, l_m\rangle$, kde $a_i, b_j, c_k, \ldots, l_m$ jsou naměřené vlastní hodnoty operátorů $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, ..., $\mathcal{L}$ (tj naměřené hodnoty veličin A,B,C,...,L). Pro tento vektor platí

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}|a_i, b_j, c_k, \ldots, l_m\rangle &= a_i\,|a_i, b_j, c_k, \ldots, l_m\rangle \\
\mathcal{B}|a_i, b_j, c_k, \ldots, l_m\rangle &= b_j\,|a_i, b_j, c_k, \ldots, l_m\rangle \\
\mathcal{C}|a_i, b_j, c_k, \ldots, l_m\rangle &= c_k\,|a_i, b_j, c_k, \ldots, l_m\rangle \qquad (115) \\
\vdots \qquad & \qquad \vdots \\
\mathcal{L}|a_i, b_j, c_k, \ldots, l_m\rangle &= l_m\,|a_i, b_j, c_k, \ldots, l_m\rangle
\end{aligned}
$$

Protože v tomto případě existuje jediný stavový vektor, který má tuto vlastnost, je stav soustavy plně určen kvantovými čísly $a_i, b_j, c_k, \ldots, l_m$; říká se, že kvantová čísla tvoří úplný soubor kvantových čísel.
Tak např. při řešení problému elektronu v atomu vodíku uvidíme, že existují 4 veličiny, které lze u elektronu současně naměřit: celková energie E, velikost momentu hybnosti $|\vec{L}|$, průmět tohoto momentu hybnosti do nějaké osy (zpravidla se bere osa Oz) L_z a průmět spinu (vlastního momentu hybnosti) do zvolené osy S_z. Odpovídající operátory $\mathcal{H}$(hamiltonián), $|\mathcal{L}|$, $\mathcal{L}_z$, $\mathcal{S}_z$ skutečně komutují a jejich vlastní hodnoty - E_n, l, m_l, m_s - plně určují stavové vektory $|n,l,m_l,m_s\rangle$ pro elektron v atomu vodíku (všimněte si, že místo E_n používáme při rozlišování vektorů jen "hlavní" kvantové číslo n, které ovšem jednoznačně určuje E_n).

Problém určení úplného souboru současně měřitelných veličin pro danou kvantovou soustavu, má principiální význam: určuje totiž maximální informaci, kterou o nějaké fyzikální soustavě v mikrosvětě můžeme získat.