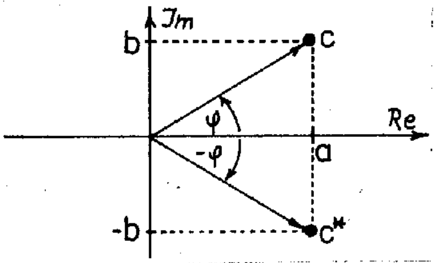
DODATKY

A) Několik potřebných matematických vztahů

A1) Komplexní čísla



Obr. 70.
Zobrazení komplexního čísla $c = a + ib$ v Gaussově rovině. $c^* = a - ib$ je číslo komplexně sdružené.
Běžné značení: $\mathrm{Re}\ c = a$, $\mathrm{Im}\ c = b$
$\varphi = \mathrm{Arg}\ c$

Absolutní hodnota (modul) : $|c| = +\sqrt{a^2 + b^2}$ (A1)

Čtverec modulu: $|c|^2 = c^*c = a^2 + b^2$ (A2)

$$\mathrm{tg}\ \varphi = \frac{b}{a} = \frac{\mathrm{Im}\ c}{\mathrm{Re}\ c} \quad \text{(A3)}$$

Exponenciální tvar: $c = |c|\ e^{i\varphi}$, $c^* = |c|\ e^{-i\varphi}$ (A4)

Moivrův vzorec: $e^{\pm i\varphi} = \cos\varphi \pm i \sin\varphi$ (A5)

a odtud(n je celé)

$$(\cos\varphi \pm i \sin\varphi)^n = \cos(n\varphi) \pm i \sin(n\varphi) \quad \text{(A6)}$$

Trigonometrické a hyperbolické funkce:

$$\sin\varphi = (e^{i\varphi} - e^{-i\varphi})/2i \quad \text{(A7)}$$

$$\cos\varphi = (e^{i\varphi} + e^{-i\varphi})/2 \quad \text{(A8)}$$

$$\sinh\varphi = (e^{\varphi} - e^{-\varphi})/2 \quad \text{(A9)}$$

$$\cosh\varphi = (e^{\varphi} + e^{-\varphi})/2 \quad \text{(A10)}$$

$$\sinh(i\varphi) = i \sin\varphi \quad , \quad \cosh(i\varphi) = \cos\varphi \quad \text{(A11)}$$

A2) Neurčité integrály

$$\int \sin^2(ax)\, dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4a} \sin(2ax) \quad \text{(A12)}$$

$$\int \cos^2(ax)\, dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4a} \sin(2ax) \quad \text{(A13)}$$

A3) Určité integrály

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(ax)}{x^2}\,dx = 2\int_{0}^{\infty} \frac{\sin^2(ax)}{x^2}\,dx = \pi\,|a| \qquad \text{(A14)}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2(x+b)^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{a} \qquad \left(-\frac{\pi}{4} < \operatorname{Arg} a < \frac{\pi}{4}\ ,\text{b libovolné}\right) \qquad \text{(A15)}$$

$$\int_{0}^{\infty} x^2\, e^{-a^2x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4a^2} \qquad (a > 0) \qquad \text{(A16)}$$

$$\int_{0}^{\infty} t^{x-1}\, e^{-t}\,dt = \Gamma(x) \qquad \text{(A17)}$$

kde $\Gamma(x)$ je funkce gama. Integrál konverguje pro $x > 0$.

Platí:

$$\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$$

$$\Gamma(x)\,\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)} \qquad (0 < x < 1)$$

$$\Gamma(x)\,\Gamma(x+\tfrac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2x-1}}\,\Gamma(2x)$$

$$\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$$

Obecně pro x=n (n je přirozené číslo) : $\Gamma(n) = (n-1)!$

$$\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\ ; \qquad \Gamma\left(\tfrac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

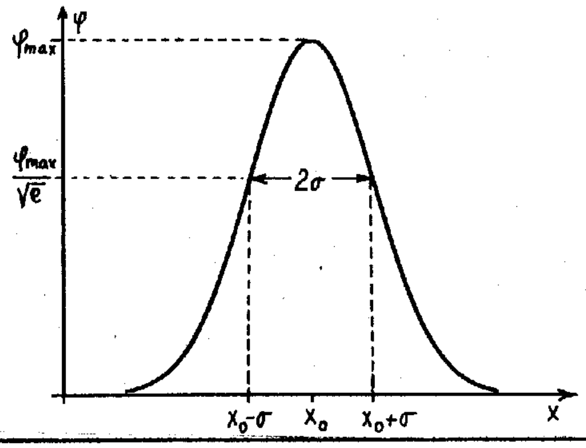
$$\int_{0}^{\pi/2} \sin^{r-1}x\, \cos^{s-1}x\,dx = \frac{1}{2}\,\frac{\Gamma\left(\frac{r}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{r+s}{2}\right)} \qquad (r > 0, s > 0)$$

$$\int_{0}^{\pi/2} \sin^{r-1}x\,dx = \int_{0}^{\pi/2} \cos^{r-1}x\,dx = \frac{\sqrt{\pi}\;\Gamma\left(\frac{r}{2}\right)}{2\;\Gamma\left(\frac{r+1}{2}\right)} \qquad (r > 0)$$

A4) Gaussova rozdělovací funkce

Normovaná Gaussova rozdělovací funkce (v počtu pravděpodobnosti se zpravidla mluví o normovaném normálním rozdělení) je

$$\varphi(x;x_0,\sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\; e^{-(x-x_0)^2/2\sigma^2} \qquad \text{(A18)}$$



Obr. 71.
Gaussova funkce se střední hodnotou x_0 a disperzí σ^2.

kde σ^2 je disperse (rozptyl), která charakterizuje šířku křivky (pro $\varphi = \varphi_{max}\, e^{-1/2}$ je šířka rovna 2σ).

Koeficient $(\sigma\sqrt{2\pi})^{-1}$ v (A18) zajišťuje normalizaci,tj platnost

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-x_0)^2/2\sigma^2}\, dx = 1$$

A5) Determinanty

Determinant ke čtvercové matici A řádu nxn se definuje takto

$$\mathrm{Det}\ A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{\{i_1,i_2,\ldots,i_n\}} \varepsilon_{i_1,i_2,\ldots,i_n}\, a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n} \qquad \text{(A19)}$$

kde $\varepsilon_{i_1,i_2,\ldots,i_n}$ je +1 tvoří-li $(i_1,i_2,\ldots,i_n)$ sudou permutaci čísel (1,2,...,n) a -1 pro lichou permutaci.

Sudá (lichá) permutace čísel (1,2,...,n) se dostane z tohoto výchozího uspořádání sudým (lichým) počtem transpozic dvojic čísel této množiny.

Ve vzorci (A19) se sečítá přes všechny permutace, kterých je n!.

Všimněte si, že každý součin v sumě obsahuje jeden a jen jeden prvek z každého řádku a sloupce.

B) Lineární vektorové prostory

V matematice se často setkáváme s objekty, pro které jsou definovány operace sečítání a násobení čísly.
Příklady:
(a) v geometrii jsou takovými objekty vektory v 3-rozměrném prostoru,
(b) v analýze se definují operace sečítání funkcí a jejich násobení čísly,
(c) v algebře se setkáváme s uspořádanými soustavami n čísel - maticemi- pro něž se definuje sečítání a násobení konstantou.
V uvedených příkladech se operace sečítání a násobení čísly provádějí na zcela odlišných matematických objektech. Na všechny takové příklady se však lze dívat z jediného jednotícího hlediska, kterým je pojem lineárního vektorového prostoru.

Definice lineárního vektorového prostoru

Množinu R prvků $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$,... nazýváme lineárním vektorovým prostorem, jestliže má tyto vlastnosti:
(a) na množině R je definováno sečítání, které je

$$\begin{aligned} &\text{komutativní :} && \vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x} \\ \text{a} \quad &\text{asociativní :} && (\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z}) \end{aligned} \tag{B1}$$

(b) na množině R je definováno násobení konstantou (skalárem), které je

$$\begin{aligned} &\text{distributivní :} && a(\vec{x} + \vec{y}) = a\vec{x} + a\vec{y} \\ &\text{asociativní :} && a(b\vec{x}) = (ab)\vec{x} \\ & && (a+b)\vec{x} = a\vec{x} + b\vec{x} \end{aligned} \tag{B2}$$

kde a,b jsou obecně komplexní konstanty.
Kromě toho se předpokládá, že v množině R
(i) existuje nulový prvek (vektor) $\vec{0}$ takový, že

$$\vec{x} + \vec{0} = \vec{x} \qquad \text{pro všechna } \vec{x} \in R\,, \tag{B3}$$

(ii) násobení libovolného $\vec{x} \in R$ skalárem 1 nemění vektor $\vec{x}$

$$1\vec{x} = \vec{x} \tag{B4}$$

(iii) ke každému $\vec{x} \in R$ existuje v R takový vektor $(-\vec{x})$, že

$$\vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{0} \tag{B5}$$

V definici se neříká jak se definují operace sečítání vektorů a násobení skalárem. Potřebné je pouze, aby byly splněny uvedené požadavky. Proto kdykoliv se setkáme s operacemi, které těmto podmínkám vyhovují, máme právo je považovat za operace sečítání vektorů a násobení skalárem a samotnou množinu prvků, na níž jsou tyto operace definovány, za lineární vektorový prostor.

Definice lineárně nezávislých vektorů

Vektory $\vec{x}$, $\vec{y}$, ..., $\vec{z}$ se nazývají lineárně nezávislé, jestliže rovnici

$$a\vec{x} + b\vec{y} + \ldots + c\vec{z} = 0 \tag{B6}$$

lze splnit jen s čísly $a = b = \ldots = c = 0$.

Definice dimenze lineárního vektorového prostoru

Jestliže v nějakém lineárním vektorovém prostoru lze najít n lineárně nezávislých vektorů, ale ani jeden soubor (n+1) nezávislých vektorů, potom říkáme, že prostor má dimenzi n (nebo: je to n-rozměrný prostor).

Lze-li v prostoru nalézt libovolný počet lineárně nezávislých vektorů, říkáme, že je to prostor nekonečné dimenze.

Definice báze v prostoru a definice souřadnic vektoru

Nechť $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ je soubor n lineárně nezávislých vektorů v n-rozměrném lineárním vektorovém prostoru R_n . Potom, je-li $\vec{x}$ libovolný vektor z R_n , je možné psát

$$\vec{x} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + \ldots + x_n \vec{e}_n = \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{e}_i \qquad (B7)$$

kde $x_1, x_2, \ldots, x_n$ jsou obecně komplexní čísla, která podle (B6) nejsou všechna současně rovna nule.
Říkáme, že vektory $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ <u>tvoří bázi</u> (souřadnou soustavu) v R_n a $x_1, x_2, \ldots x_n$ jsou <u>souřadnicemi</u> vektoru $\vec{x}$ v této bázi.
Bázi lze vždy vybrat i v prostoru nekonečné dimenze.

Definice skalárního součinu

<u>Metrika</u> se do lineárního vektorového prostoru zavede definicí skalárního součinu dvou vektorů. V lineárním vektorovém prostoru R je definován skalární součin, jestliže každé uspořádané dvojici vektorů $\vec{x}, \vec{y} \in R$ je přiřazeno číslo (obecně komplexní), které označíme $(\vec{x}, \vec{y})$ (nebo $\langle x|y \rangle$ podle Diraca), vyhovující těmto požadavkům:

$$\begin{aligned} (\vec{x}, \vec{y}) &= (\vec{y}, \vec{x})^* \\ (\vec{x}, (a\vec{y} + b\vec{z})) &= a(\vec{x}, \vec{y}) + b(\vec{x}, \vec{z}) \\ (\vec{x}, \vec{x}) &\geqslant 0 \quad (\text{ reálné }) \text{ přičemž} \\ \text{z } (\vec{x}, \vec{x}) = 0 &\text{ plyne, že } \vec{x} = \vec{0} \end{aligned} \qquad (B8)$$

Z prvních dvou požadavků dále plyne, že

$$((a\vec{x} + b\vec{y}), \vec{z}) = a^*(\vec{x}, \vec{z}) + b^*(\vec{y}, \vec{z})$$

Dva vektory $\vec{x}, \vec{y} \in R$ jsou <u>ortogonální</u>, jestliže

$$(\vec{x}, \vec{y}) = 0 .$$

Veličina $|\vec{x}|^2 = (\vec{x}, \vec{x})$ se nazývá <u>norma vektoru $\vec{x}$</u> ; $|\vec{x}| = (\vec{x}, \vec{x})^{1/2}$ je <u>délka vektoru x</u>.
Doporučuji čtenáři, aby si vše co bylo v tomto odstavci řečeno, nejprve přenesl a promyslel v 3-rozměrném reálném vektorovém prostoru (čísla a,b,.. i souřadnice vektoru jsou reálná čísla) a potom si představil zobecnění na n-rozměrný (i pro $n \to \infty$) komplexní prostor.

C) δ - funkce

Diracova δ-funkce $\delta(x)$ se definuje vztahem

$$\int_{-a}^{b} \delta(x)\, dx = 1 \qquad \text{pro libovolná } a,b > 0 \tag{C1}$$

Odtud je vidět, že $\delta(x)=0$ pro $x \neq 0$ a v $x=0$ není definována. Nejde tedy o funkci v běžném slova smyslu, ale spíše o symbol, který má smysl jen v integrandu (δ-funkce patří mezi tzv. zobecněné funkce nebo také distribuce; viz [18]). δ-funkci lze vyjádřit jako limitu posloupnosti funkcí; např pro $\varepsilon \to 0+$ (ε se blíží k nule ze strany kladných hodnot) to jsou posloupnosti

$$\frac{1}{2\varepsilon}\, e^{-|x|/\varepsilon} \tag{C2}$$

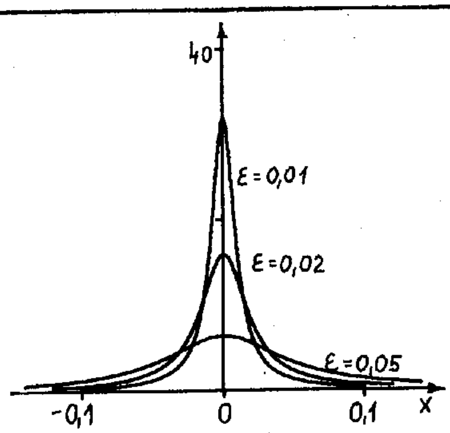
$$\frac{1}{\pi}\, \frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2} \tag{C3}$$

$$\frac{1}{\varepsilon\sqrt{\pi}}\, e^{-x^2/\varepsilon^2} \tag{C4}$$

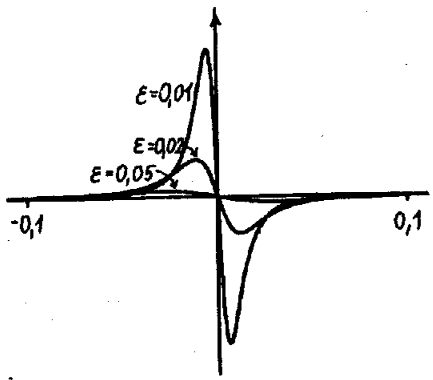
$$\frac{1}{\pi}\, \frac{\sin(x/\varepsilon)}{x} \tag{C5}$$

$$\frac{1}{\pi}\, \mathrm{Im}\left(\frac{1}{x - i\varepsilon}\right) \qquad \text{(což je (C3))} \tag{C6}$$

Velice užitečná integrální reprezentace δ-funkce je v dod.D.



Obr. 72.
Funkce (C3) pro tři různé hodnoty parametru ε . δ-funkci lze reprezentovat limitou pro $\varepsilon \to 0+$.



Obr. 73
Derivace funkcí (C3) pro tři různé hodnoty ε . Derivaci δ-funkce $\delta'(x)$ reprezentuje limita pro $\varepsilon \to 0+$.

Z charakteru δ-funkce je zřejmé, že platí

$$\int f(x)\,\delta(x-x_0)\,dx = f(x_0)\,, \tag{C7}$$

jestliže integrační obor obsahuje bod x_0 a $f(x)$ je libovolná funkce spojitá v x_0. Vztah (C7) se může též použít pro definici δ-funkce.

Pro δ-funkci platí vztahy (plný smysl mají opět až za $\int$)

$$x\,\delta(x) = 0 \tag{C8}$$

$$\delta(x - x_0) = \delta(x_0 - x) \tag{C9}$$

$$\delta(ax) = a^{-1}\,\delta(x) \qquad \text{pro } a > 0 \tag{C10}$$

$$\delta(x^2 - a^2) = (2a)^{-1}\left[\delta(x-a) + \delta(x+a)\right] \qquad \text{pro } a>0 \tag{C11}$$

δ-funkce v 3-rozměrném prostoru se definuje obdobně (C1):

$$\iiint \delta(\vec{r})\,d^3\vec{r} = 1 \tag{C12}$$

jestliže integrační obor obsahuje bod $\vec{r} = 0$.

Vztah (C7) se zobecní na

$$\iiint d^3\vec{r}\;\delta(\vec{r}-\vec{r}_0)\,f(\vec{r}) = f(\vec{r}_0) \tag{C13}$$

$\delta(\vec{r}-\vec{r}_0)$ může být rozepsána v součin tří jednorozměrných δ-funkcí ($\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$)

$$\delta(\vec{r}-\vec{r}_0) = \delta(x-x_0)\,\delta(y-y_0)\,\delta(z-z_0) \tag{C14}$$

nebo ve sférických souřadnicích (r, θ, φ)

$$\delta(\vec{r}-\vec{r}_0) = \frac{1}{r^2 \sin\theta}\,\delta(r-r_0)\,\delta(\theta-\theta_0)\,\delta(\varphi-\varphi_0) =$$

$$= \frac{1}{r^2}\,\delta(r-r_0)\,\delta(\cos\theta - \cos\theta_0)\,\delta(\varphi-\varphi_0) \tag{C15}$$

Derivace δ-funkce - $\delta'(x)$

Derivaci δ-funkce lze považovat za limitu (pro $\varepsilon \to 0+$) derivací funkcí posloupností (C2) - (C6).

Platí

$$\delta'(-x) = -\,\delta'(x) \tag{C16}$$

$$x\,\delta'(x) = -\,\delta(x) \tag{C17}$$

D) Fourierova transformace

Nechť $f(x)$ je funkce periodická s periodou L, tj. $f(x+L) = f(x)$. Takovou funkci je možné psát ve tvaru komplexní Fourierovy řady

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \, e^{i2\pi nx/L} \quad . \tag{D1}$$

Koeficienty a_n jsou dány vztahem

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{x_0}^{x_0+L} dx \, f(x) \, e^{-i2\pi nx/L} \quad , \tag{D2}$$

kde x_0 je libovolné reálné číslo (nejčastěji se klade $x_0=0$ nebo $x_0=-L/2$). Uvažme nyní případ $L \to \infty$. Suma potom přejde v integrál takto:

$$2\pi n/L = k \qquad a \qquad La_n = g(k)$$

Protože n roste v sumě po jednotce, platí ($F_n = F(k)$)

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n = \int_{-\infty}^{\infty} F_n dn = \frac{L}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(k) \, dk$$

Dostáváme tedy

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(k) \, e^{ikx} \, dk \tag{D3a}$$

$$g(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, e^{-ikx} \, dx \tag{D3b}$$

Funkce $g(k)$ se nazývá Fourierova transformace funkce $f(x)$ a opačně. Koeficient $1/2\pi$ v (D3a) se často "rozděluje" symetricky mezi $f(x)$ a $g(k)$, takže

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(k) \, e^{ikx} \, dk \quad ; \quad g(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, e^{-ikx} \, dx} \tag{D4}$$

Kombinací výrazů pro $f(x)$ a $g(k)$ obdržíme

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \, e^{ikx} \int_{-\infty}^{\infty} f(x') \, e^{-ikx'} dx' = \int_{-\infty}^{\infty} dx' f(x') \, \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(x-x')k} dk \tag{D5}$$

Aby tato rovnost platila pro libovolnou funkci $f(x)$, musí zřejmě být (srov.(C7))

$$\boxed{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(x-x')k} \, dk = \delta(x-x')} \tag{D6}$$

Tím jsme získali velice užitečnou integrální reprezentaci δ-funkce.

Tuto reprezentaci lze např. využít při důkazu Parsevalova teorému ,podle kterého

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 \, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |g(k)|^2 \, dk \tag{D7}$$

kde $|f(x)|^2 = f^*(x)f(x)$ a $|g(k)|^2 = g^*(k)g(k)$. Důkaz (pokud ho nesvedete sami) najdete třeba v [1] . Parsevalův teorém je velice užitečný ke stanovení fyzikální reprezentace Fourierova obrazu g(k), jestliže známe fyzikální smysl f(x).

Fourierovu transformaci (D4) lze snadno rozšířit do 3-rozměrného prostoru na funkce $f(\vec{r})$:

$$f(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \iiint d^3\vec{k} \;\; g(\vec{k}) \; e^{i\vec{k}\vec{r}} \tag{D8a}$$

$$g(k) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \iiint d^3\vec{r} \;\; f(\vec{r}) \; e^{-i\vec{k}\vec{r}} \tag{D8b}$$

Trojrozměrná δ-funkce (C14) pak má integrální reprezentaci

$$\delta(\vec{r}-\vec{r}_o) = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint d^3\vec{k} \; e^{i(\vec{r}-\vec{r}_o)\vec{k}} \tag{D9}$$

δ-funkce se využívá při normalizaci rovinných vln (de Broglieho vln). Integrál

$\int e^{i(\vec{k}-\vec{k}')\vec{r}} \, d^3\vec{r}$ je součinem tří jednorozměrných integrálů

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(k_x - k_x')x} \, dx = \lim_{L \to \infty} \int_{-L}^{L} e^{i(k_x-k_x')x} \, dx =$$

$$= \lim_{L \to \infty} \frac{2 \sin\big(L(k_x-k_x')\big)}{k_x - k_x'} = 2\pi \, \delta(k_x - k_x') \tag{D10}$$

a podobně pro y,z (v posledním kroku v (D10) jsme použili (C4)).
Je tedy

$$\iiint_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\vec{k}-\vec{k}')\vec{r}} \, d^3\vec{r} = (2\pi)^3 \, \delta(\vec{k} - \vec{k}') \tag{D11}$$

Provedeme-li takto normalizaci de Broglieho rovinných vln (místo v oblasti periodicity), přejde (II.35) v

$$\boxed{\psi_{\vec{p}}(\vec{r},t) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \; e^{i(\vec{p}\vec{r} - Et)/\hbar}} \tag{D12}$$

E) Diferenciální operátory z vektorové analýzy

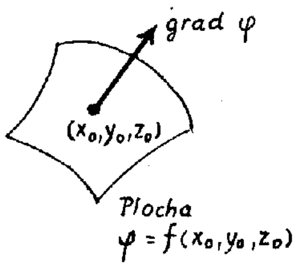
Gradient skalárního pole

Funkcí $\varphi = f(x,y,z)$ je dáno v oblasti, na níž je funkce definována, tzv. skalární pole. Plochy φ = konst jsou tzv. hladiny tohoto pole. Příkladem takové funkce je třeba potenciál elektrostatického pole a v něm ekvipotenciální plochy pro φ = konst.

Vektor

$$\operatorname{grad} \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\vec{k} \qquad (E1)$$

kde $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ jsou jednotkové vektory ve směru os tvořících kartézskou souřadnou soustavu, se nazývá gradient daného skalárního pole.
Gradient funkce φ v nějakém bodě (x_0,y_0,z_0) je vektor kolmý k hladině jdoucí bodem (x_0,y_0,z_0) (obr.74).



Obr. 74.

Gradient se píše symbolicky takto

$$\operatorname{grad} \varphi = \nabla\varphi = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)\varphi$$

kde

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k} \qquad (E2)$$

je tzv. operátor nabla.

Divergence a rotace vektorového pole

Je-li v každém bodě nějaké oblasti zadán vektor, potom je v této oblasti definováno vektorové pole. Příkladem mohou být vektory udávající intenzitu $\vec{E}$ elektrostatického pole, nebo množina vektorů grad φ ve skalárním poli.

Mějme vektorové pole

$$\vec{a}(x,y,z) = a_x(x,y,z)\,\vec{i} + a_y(x,y,z)\,\vec{j} + a_z(x,y,z)\,\vec{k} \qquad (E3)$$

Vektor $\vec{a}$ a tedy i jeho souřadnice a_x, a_y, a_z v kartézské souřadné soustavě určené jednotkovými vektory $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$, jsou funkcemi polohy, tj. bodu (x,y,z).

Divergencí vektoru $\vec{a}$ se nazývá skalár

$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \qquad (E4)$$

Protože na div $\vec{a}$ je možné pohlížet též jako na skalární součin vektoru (operátoru) ∇ s vektorem $\vec{a}$, značí se divergence a též $\nabla\vec{a}$.
Fyzikální význam: uvažujme stacionární proudění kapaliny charakterizované v každém bodě vektorem rychlosti $\vec{v}(x,y,z)$. Divergence $\vec{v}$ znamená

objemové množství kapaliny, které vyteče z jednotkového objemu za jednotku času. Pro nestlačitelnou kapalinu je div $\vec{v} = 0$ (není-li v uvedeném objemu zřídlo); tzn, že kolik do objemu přiteklo, tolik muselo také vytéci.

Rotací vektoru $\vec{a}$ se nazývá vektor

$$\operatorname{rot}\vec{a} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\vec{k} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} \qquad \text{(E5)}$$

Místo rot $\vec{a}$ se často píše (především v západní literatuře) curl $\vec{a}$. Protože rot $\vec{a}$ lze formálně dostat jako vektorový součin vektoru (operátoru) ∇ a vektoru $\vec{a}$, značí se též $\nabla \times \vec{a}$.
Fyzikální význam. Je-li $\vec{v}$ rychlost kapaliny, vyznačuje rot $\vec{v}$ svým směrem směr osy, kolem které se kapalina v malém okolí uvažovaného bodu otáčí jako celek a $|\operatorname{rot}\vec{v}|$ je dvojnásobkem rotační rychlosti (v obloukové míře).
Pole v němž všude platí rot $\vec{a} = 0$ se nazývá nevírové. Nevírové je např. pole, které dostaneme tak, že ve skalárním poli $\varphi(x,y,z)$ přiřadíme každému bodu vektor grad φ . Přímým výpočtem ověříte, že

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi = 0 \text{ (nulový vektor)} \qquad \text{(E6)}$$

Podrobnou diskusi fyzikálního významu operátorů grad, div a rot najdete v učebnici [4] .

Laplaceův operátor Δ se získá skalárním násobením operátoru ∇ (nabla) sebou samým

$$\Delta = \nabla . \nabla = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \qquad \text{(E7)}$$

Ještě několik vzorců pro operátory Δ, ∇ (f,g jsou skalární pole, $\vec{a},\vec{b}$ vektorová pole):

$$\begin{aligned}
\nabla(fg) &= \operatorname{grad}(fg) = f \operatorname{grad} g + g \operatorname{grad} f \\
\nabla(f\vec{a}) &= \operatorname{div}(f\vec{a}) = f \operatorname{div}\vec{a} + \vec{a} \operatorname{grad} f \\
\nabla(\vec{a}\times\vec{b}) &= \operatorname{div}(\vec{a}\times\vec{b}) = \vec{b}.\operatorname{rot}\vec{a} - \vec{a}.\operatorname{rot}\vec{b} \qquad \text{(E8)} \\
\nabla(\nabla\vec{a}) &= \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{a} = \operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{a} + \Delta\vec{a} \\
\nabla(\nabla\times\vec{a}) &= \operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{a} = 0
\end{aligned}$$