ⓐ

Multivektory

vektory určují přímky

dvojice vektorů roviny

atd.

chceme namyslet součin $\wedge$, jež z dvojice vektorů vytvoří objekt určující rovinu ... bivektor

vezmeme-li dva stejné vektory, rovinu nedostaneme

$u \wedge u = 0$ (nulový bivektor) ... odtud plyne (polarizací)

distributivita vzhledem k násobení

$$0 = (u+v)\wedge(u+v) = \underbrace{u\wedge u}_{0} + u\wedge v + v\wedge u + \underbrace{v\wedge v}_{0} \Rightarrow u\wedge v = -v\wedge u$$

tento součin tedy musí být antikomutativní

bivektory lze sčítat, výsledkem obecně nemusí být bivektor (od dim 4)

rigorózní konstrukce ... tenzorový součin → antisymetrizace

Obecně máme na vekt. prostoru V, $\dim V = n$ prostor (lin.k) r-vektorů $\Lambda^r V$ reprezentujících r-rozměrné podprostory

$\alpha, \beta \in \Lambda^r V$ repr. st. podprostory (jednoduché) $\alpha = a\beta$ $\boxed{a \in \mathbb{R}, \mathbb{C}}$

bázi v prostoru r-vektorů zkonstruujeme pomocí báze v prostoru V $(e_i) \rightsquigarrow (e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k})$, $i_1 < \dots < i_k$

Odtud plyne $\dim \Lambda^r V = \binom{n}{r}$. $r > n \to \{0\}$.

Prostor $\Lambda V = \bigoplus_{r=0}^{n} \Lambda^r V$ tvoří tzv. Grassmannovu algebru.

Duální prostor, tj. prostor lin. zobrazení $\Lambda^r V \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$ značíme $\Lambda^r(V^*) = (\Lambda^r V)^*$.

Je-li na V zadán skalární součin, určuje jednoznačně skalární součin $\langle \cdot , \cdot \rangle_\Lambda$ na $\Lambda^r V$, V^* i $\Lambda^r V^*$.

$$\langle v_1 \wedge \dots \wedge v_r, w_1 \wedge \dots \wedge w_r \rangle_\Lambda = \det \begin{pmatrix} \langle v_1, w_1 \rangle & & \\ & \ddots & \\ & & \langle v_r, w_r \rangle \end{pmatrix}$$

sk. součin určuje k. izomorfismus mezi V a V^*: $\Phi_{\langle , \rangle}: v \mapsto (\langle v, \cdot \rangle : V \to \mathbb{R})$

$$\langle \alpha, \beta \rangle_{-1} := \langle \Phi^{-1}_{\langle , \rangle}(\alpha), \Phi^{-1}_{\langle , \rangle}(\beta) \rangle$$

Př. Pro $V = \mathbb{R}^n$

$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in V \qquad \alpha = (\alpha_1 \dots \alpha_n) \in V^*$

$\langle v, w \rangle = v^T G w \qquad \langle \alpha, \beta \rangle = \alpha (G^{-1})^T \beta^T$

$\Phi_{\langle,\rangle} : v \mapsto (Gv)^T$

Operace $*$

$\alpha \wedge (*\beta) = \langle \alpha, \beta \rangle \omega$

ω … objemový element

or. ON báze

~~Ve každém bodě~~

Varieta M – lokálně vypadají jako $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$

lze ~~uvažovat tečné vektory~~

V každém bodě x variety M můžeme uvažovat prostor tečných vektorů ke křivkám procházejících tímto bodem $T_x M$. Jedná se o ~~fin~~ vekt. prostor dimenze n $\dim T_x M = n$.

Můžeme tento prostor uvažovat v roli V a zkonstruovat $\Lambda^r T_x M$, $T_x^* M$, $\Lambda^r T_x^* M$ atd. (uvažujeme sjednocení $\forall x$) Jejich řezy jsou pole. (

Na každé (parakompaktní, Hausdorffové) varietě ex. ~~sk~~ v každém bodě skalární součin g – metrické tenzorové pole.

Př. ⓐ $M = \mathbb{R}^3$ $\quad g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \delta_{ij} \Rightarrow g = \underbrace{dx^1 \odot dx^1}_{(dx^1)^2} + dx^2 \odot dx^2 + dx^3 \odot dx^3$

ⓑ $\mathbb{H}^2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$ … hyperbolická rovina

$$g = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$$

Gradient f: $\nabla f = \Phi_g^{-1}(df)$, diferenciál f-ce

Existuje jediné R-lineární zobrazení $d : \Omega^r(M) \to \Omega^{r+1}(M)$ takové, že

(i) $d : \Omega^0(M) \to \Omega^1(M)$ je diferenciál f-ce

(ii) $d^2 = 0$

(iii) $d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^{|\alpha|} \alpha \wedge d\beta$

Př. Termodynamika id. plynu (proměnné jsou S a V)

ⓐ $dU = TdS - p\,dV \quad \Big| \quad 0 = d^2 U = dT \wedge dS - dp \wedge dV$

$\left.\frac{\partial T}{\partial V}\right|_S = -\left.\frac{\partial p}{\partial S}\right|_V \qquad = \left(\frac{\partial T}{\partial S} dS + \frac{\partial T}{\partial V} dV\right) \wedge dS - \left(\frac{\partial p}{\partial S} dS + \frac{\partial p}{\partial V} dV\right) \wedge dV$

(b) $dS = \frac{dU}{T} + \frac{p}{T} dV$ (proměnné U a V)

$$0 = d^2S = -\frac{1}{T^2}\left(\frac{\partial T}{\partial U} dU + \frac{\partial T}{\partial V} dV\right) \wedge dU +$$
$$+ \frac{\left(\frac{\partial p}{\partial U} dU + \frac{\partial p}{\partial V} dV\right) T - p\left(\frac{\partial T}{\partial U} dU + \frac{\partial T}{\partial V} dV\right)}{T^2} \wedge dV$$

odtud $\left.\frac{\partial T}{\partial V}\right|_U = -T \left.\frac{\partial p}{\partial U}\right|_V + p \left.\frac{\partial T}{\partial U}\right|_V$

(c) rot, div, grad pro $M = \mathbb{R}^3$ v ON bázi

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial f}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial f}{\partial x^3} dx^3$$

$$d(A_1 dx^1 + A_2 dx^2 + A_3 dx^3) = dx^2 \wedge dx^3 \left(\frac{\partial A_3}{\partial x^2} - \frac{\partial A_2}{\partial x^3}\right) +$$
$$+ dx^3 \wedge dx^1 \left(\frac{\partial A_1}{\partial x^3} - \frac{\partial A_3}{\partial x^1}\right) + dx^1 \wedge dx^2 \left(\frac{\partial A_2}{\partial x^1} - \frac{\partial A_1}{\partial x^2}\right)$$

$$d(B_{23} dx^2 \wedge dx^3 + B_{31} dx^3 \wedge dx^1 + B_{12} dx^1 \wedge dx^2) =$$
$$= \left(\frac{\partial B_{23}}{\partial x^1} + \frac{\partial B_{31}}{\partial x^2} + \frac{\partial B_{12}}{\partial x^3}\right) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$$

= * (de Rham) *

Operace $*$ lze zobecnit na M (pro daný sk. součin)

$\alpha \wedge * \beta = g(\alpha, \beta)\, \omega$ ~ ω ... obj. element (M orientovatelná)

$\boxed{\text{Vlastnosti } *}$

$$*(f\alpha + g\beta) = f*\alpha + g*\beta$$
$$**\alpha = (-1)^{r(n-r)} \alpha$$
$$\alpha \wedge * \beta = \beta \wedge * \alpha$$
$$*(\alpha \wedge * \beta) = \langle \alpha, \beta \rangle$$
$$\langle *\alpha, *\beta \rangle = \langle \alpha, \beta \rangle$$

$\boxed{\text{Stokesova věta}}$

$$\int_M d\alpha = \int_{\partial M} \alpha$$

(Buď M kompaktní nebo α s kompaktním nosičem)

Na $\Omega^r(M)$ můžeme zavést skalární součin podobně jako na $\Omega^0(M)$

$$(\alpha, \beta) = \int_M \langle \alpha, \beta \rangle \omega = \int_M \alpha \wedge * \beta$$

(Sk. součin pro formy vyšších řádů $\neq 0$

Otázka: Jaký operátor je sdružený k operátoru d?

Tzn.

$$(d\alpha, \beta) = \int_M \langle d\alpha, \beta \rangle \omega = \int_M \langle \alpha, d^+\beta \rangle \omega = (\alpha, d^+\beta)$$

$$d^+ = (-1)^k (*^{-1})\, d\, * = (-1)^{n(k+1)+1} * d *$$

(snižuje řád o 1)

Př. $M = \mathbb{R}^3$

~~dělá~~ $d^+ f = 0$

$$d^+(A_1 dx^1 + A_2 dx^2 + A_3 dx^3) =$$

$$(-1)^{3\cdot 2+1} * \left(\frac{\partial A_1}{\partial x^1} + \frac{\partial A_2}{\partial x^2} + \frac{\partial A_3}{\partial x^3}\right) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 =$$

$$= -\left(\frac{\partial A_1}{\partial x^1} + \frac{\partial A_2}{\partial x^2} + \frac{\partial A_3}{\partial x^3}\right)$$

Laplaceův operátor $\quad \Delta = dd^+ + d^+d : \Omega^r(M) \to \Omega^r(M)$

(Laplace - Beltrami) $\quad$ forma $\Delta\alpha = 0$ .. harmonická

Př. $M = \mathbb{R}^n$ s kanonickým souř. (na každou složku (působí) $-\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{(\partial x^i)^2}$)

Vlastnosti:
(i) $*\Delta = \Delta *$
(ii) $\Delta^+ = \Delta$
(iii) $\Delta\alpha = 0 \Leftrightarrow d\alpha = 0 \wedge d^+\alpha = 0$

Důkaz (iii): $\quad d\alpha = 0 \wedge d^+\alpha = 0 \Rightarrow (dd^+ + d^+d)\alpha = 0$

$$0 = (\Delta\alpha, \alpha) = ((dd^+ + d^+d)\alpha, \alpha) = (dd^+\alpha, \alpha) +$$

$$+ (d^+d\alpha, \alpha) = (d^+\alpha, d^+\alpha) + (d\alpha, d\alpha)$$

$$= \|d^+\alpha\|^2 + \|d\alpha\|^2 .$$

Pro kompaktní variety (souvislou): $\quad \Delta f = 0 \Rightarrow f = \text{konst}$

Hodgeova dekompozice: označme $\mathcal{H}^r(M) = \{\alpha \in \Omega^r(M) \mid \Delta\alpha = $

de Rhamův kvocient $\quad D^r = \ker d^r / \operatorname{im} d^{r-1}$ $\quad \boxed{D^r \cong \mathcal{H}^r}$

$$0 \to \mathbb{R} \to \Omega^0(M) \xrightarrow{d^0} \Omega^1(M) \to \dots \xrightarrow{d^{n-1}} \Omega^n(M) \xrightarrow{d^n} 0$$

Hodgeův rozklad:

$$\Omega^r(M) = \mathcal{H}^r(M) \oplus d\Omega^{r-1}(M) \oplus d^+\Omega^{r+1}(M)$$

všechny tři sčítance tvoří ortogonální podprostory

(Př.) $M = \mathbb{R}^3$ v kan. souřadnicích

každou 1-formu $\alpha = A_1 dx^1 + A_2 dx^2 + A_3 dx^3$ lze zapsat

jako $\alpha = \underbrace{}_{\gamma} \oplus df \oplus \delta\beta$

$\gamma \in \mathcal{H}^1(M)$ $\beta \in \Omega^2(M)$

(klasická interpretace) $(df)^\sharp$ … bezvírové v.p.

$(\delta\beta)^\sharp$ … nezřídlové v.p.

γ … harmonická 1-forma

[pokud $\|\alpha_x\| \to 0$ pro $x \to \infty$ je $\gamma \equiv 0$]

(Př.) $M = S^2$ ve sférických souřadnicích ON báze $\Omega^1(S^2)$

$$df(\theta,\varphi) = \frac{\partial f}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial f}{\partial \varphi} d\varphi = \frac{\partial f}{\partial \theta}(d\theta) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}(\sin\theta\, d\varphi)$$

$$d(A\,d\theta + B\sin\theta\, d\varphi) = \left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial(B\sin\theta)}{\partial\theta} - \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A}{\partial\varphi}\right) d\theta \wedge \sin\theta\, d\varphi$$

$$d^+(A\,d\theta + B\sin\theta\, d\varphi) = (-1)^{2\cdot 2+1} * d(-B\, d\theta + A\sin\theta\, d\varphi) =$$

$$= - * \left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial B}{\partial\varphi} + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial(A\sin\theta)}{\partial\theta}\right) d\theta \wedge \sin\theta\, d\varphi$$

$$= -\frac{1}{\sin\theta}\left(\frac{\partial B}{\partial\varphi} + \frac{\partial(A\sin\theta)}{\partial\theta}\right)$$

$$d^+(C\, d\theta \wedge \sin\theta\, d\varphi) = (-1^{2\cdot 3+1}) * dC =$$

$$= - * \left(\frac{\partial C}{\partial\theta} d\theta + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial C}{\partial\varphi}\sin\theta\, d\varphi\right) =$$

$$= + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial C}{\partial\varphi} d\theta - \frac{\partial C}{\partial\theta}\sin\theta\, d\varphi$$

Laplaceův operátor pro 1-formy α na sféře

[(Pro 0-formy ... konst.)   Pro (2-formy) ... R-násobek $d\theta \wedge \sin\theta\, d\varphi$]

$$\left.\begin{aligned} d\alpha &= 0 \\ d^{+}\alpha &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \frac{\partial(B\sin\theta)}{\partial\theta} - \frac{\partial A}{\partial\varphi} = 0$$

$$\frac{\partial(A\sin\theta)}{\partial\theta} + \frac{\partial B}{\partial\varphi} = 0$$

$$(dd^{+} + d^{+}d)\alpha = \;?$$

[V dalším se budeme zabývat vlastními hodnotami a vektory Laplaceova operátoru na kompaktních varietách.

$$d\Delta = d(ddd^{+} + dd^{+}d) = d^{+}dd + dd^{+}d =$$

$$= (d^{+}d + dd^{+})\, d = \Delta d$$

$$d^{+}\Delta = \Delta d^{+}$$]