Rovnice
matematické fyziky
cvičení

Michael Krbek

Obsah

I. Opakování ze známé matematické analýzy

Fourierovy řady. Napřed si dovolím hodně stručnou rekapitulaci výsledků teorie Fourierových řad funkcí. Uvědomme si, že každou funkci F na jednotkové kružnici $S^1 = \{e^{ix} \in \mathbf{C} | x \in \mathbf{R}\}$ lze jednoznačně identifikovat s 2π-periodickou funkcí f v $\mathbf{R}$ vztahem $f(x) = F(e^{ix})$. Pro každou funkci $f \in L^2(S^1)$ definujeme její **Fourierovy koeficienty** c_n pomocí vzorce

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{inx} \, dx.$$

Fourierova řada funkce f je řada

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx},$$

posloupnost jejích částečných součtů je

$$s_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx}.$$

Pro každou posloupnost $\{c_n\} \in \ell_2$, tj. takovou, že $\sum |c_n|^2 < \infty$ existuje funkce $f \in L^2(S^1)$ taková, že c_n jsou jejími Fourierovými koeficienty (Riesz-Fisherova věta) a tento vztah zachovává skalární součiny na ℓ_2 a $L^2(S^1)$ (Parsevalova věta). Důsledkem je, že každá $f \in L^2(S^1)$ je L^2-limitou posloupnosti částečných součtů své Fourierovy řady.

Bodová konvergence je podstatně obtížnější problém. Obvykle se uvádí a nedokazuje následující výsledek: Je-li 2π-periodická funkce f po částech spojitá, pak součet její Fourierovy řady v bodě x je roven aritmetickému průměru $(f(x+) + f(x-))/2$, kde $f(x+) = \lim_{t \to x^+} f(t)$ a obdobně pro $f(x-)$.

1. Trigonometrický polynom je konečný součet tvaru

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{N} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad x \in \mathbf{R}, N \in \mathbf{N},$$

kde a_n, b_n jsou obecně komplexní čísla. Pomocí Eulerova vztahu $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ přepište jako

$$f(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx}.$$

Jakou podmínku musí splňovat c_n, aby všechna odpovídající a_n, b_n byla reálná? (Obecný trigonometrický polynom je tedy komplexní funkcí reálné proměnné a ptáme se, kdy bude reálnou funkcí reálné proměnné.) **[# 1]**

2. Je-li $f(x)$ sudá (resp. lichá) funkce, pak pro členy její Fourierovy řady platí $b_n = 0$ (resp. $a_n = 0$). Dokažte to! **[# 1]**

3. Určete Fourierovu řadu funkce $f(x)$ periodické s periodou $2h$. **[# 1]**

Určete Fourierovy řady následujících funkcí periodických mimo vyznačený interval.

4. $f(x) = \begin{cases} -1 & x \in (-\pi, 0] \\ 1 & x \in (0, \pi) \end{cases}$ je 2π-periodická. **[# 1]**

5. $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in (0, y] \\ 0 & x \in (y, \pi), \end{cases}$ kde $y \in (0, \pi)$, $f(x)$ je 2π-periodická a sudá. **[# 1]**

6. $f(x) = \mathrm{e}^x$, $x \in (-h, h)$ je $2h$-periodická. **[# 1]**

$f(x) = \sin kx$ pro $x \in (0, \pi)$, $k \in \mathbf{N}$, 2π-periodická, sudá. **[# 1]**

7. Určete Fourierovu řadu 2π-periodického lichého rozšíření funkce dané $f(x) = x(\pi - x)$ pro $x \in (0, \pi)$. Použijte výsledek k součtu číselné řady

$$1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \cdots$$ **[# 2]**

Obyčejné diferenciální rovnice. Pro obyčejné diferenciální rovnice máme zaručenu existenci a jednoznačnost řešení pro obvyklé hladké funkce, kde vše plyne z existence řešení pro soustavu $y' = f(y), y(0) = y_0$ pomocí věty o pevném bodě (pro diferenciální rovnice se jí říká Picardova věta). Dokonce je v těchto případech zaručena hladká závislost řešení na počátečních podmínkách (to už se ale většinou nedokazuje). Víme tedy většinou, že když nalezneme řešení, bude určeno jednoznačně.

Na řešení obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu existuje řada metod závislých od typu rovnice: separace proměnných, Bernoulliho rovnice, exaktní rovnice, rovnice s konstantními koeficienty. Z rovnic vyššího řádu se probírají zpravidla jen rovnice lineární.

Nalezněte obecná řešení diferenciálních rovnic prvního řádu

8. $y' - x^2 y = x^2$, **[# 1]**

9. $y' + \frac{2y}{x} = \sin x$, **[# 1]**

10. $y = 2xy' - (y')^2$, $\quad y' = \lambda y(1 - y), y(0) = y_0$. **[# 1]**

11. Řešte obecně diferenciální rovnici

$\left(\frac{1}{y}+y-1\right)\mathrm{d}x+\left(\frac{1}{x}+x+1\right)\mathrm{d}y=0.$ **[# 1]**

Obecně řešte diferenciální rovnice druhého řádu

12. $y''+y=\mathrm{e}^{-x}$, **[# 1]**

13. $x^2y''+xy'+y=0.$ **[# 1]**

II. Parciální diferenciální rovnice – metoda charakteristik

Obecná parciální diferenciální rovnice prvního řádu pro dvě nezávislé proměnné x, y a jednu závislou proměnnou u je dána jako

$$F(x,y,u,p,q)=0,$$

kde $p=u_x$ a $q=u_y$. Řešení získáme zobecněnou metodou charakteristik, tzv. **Lagrange-Charpitovou metodou**. Řešíme soustavu obyčejných diferenciálních rovnic

$$\frac{\mathrm{d}x}{F_p}=\frac{\mathrm{d}y}{F_q}=\frac{\mathrm{d}u}{pF_p+qF_q}=-\frac{\mathrm{d}p}{F_x+pF_u}=-\frac{\mathrm{d}q}{F_y+qF_u}.$$

14. Řešte Cauchyho úlohu

$$\begin{aligned} u_t+au_x&=0, \quad x\in\mathbf{R},\ a\in\mathbf{R},\ t>0\\ u(0,x)&=\varphi(x), \quad x\in\mathbf{R}. \end{aligned}$$

[# 1]

15. Řešte Cauchyho úlohu

$$\begin{aligned} u_t+xu_x&=0, \quad x\in\mathbf{R},\ t>0\\ u(0,x)&=\varphi(x), \quad x\in\mathbf{R}. \end{aligned}$$

[# 2]

16. Řešte Cauchyho úlohu

$$\begin{aligned} u_t+uu_x&=0, \quad x\in\mathbf{R},\ t>0\\ u(0,x)&=\varphi(x), \quad x\in\mathbf{R}. \end{aligned}$$

[# 2]

17. Určete všechny diferencovatelné funkce f dvou nezávisle proměnných, jež jsou invariantní vůči lineárním transformacím těchto nezávisle proměnných zachovávajícím obsah. **[# 3]**

18. Určete všechny diferencovatelné funkce f tří nezávisle proměnných, které jsou invariantní vůči ortogonálním transformacím těchto nezávisle proměnných. **[# 5]**

Převeďte do kanonického tvaru rovnice:

19. $y^2 u_{xx} + 2xyu_{xy} + 2x^2 u_{yy} + yu_y = 0.$ **[# 1]**

20. $u_{xy} - u_{xz} + u_x + u_y - u_z = 0.$ **[# 1]**

21. $u_{xx} + 2u_{xy} - 2u_{xz} + 2u_{yy} + 6u_{zz} = 0.$ **[# 1]**

22. Transformujte Laplaceovu rovnici

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

do nových souřadnic $a = x^2 - y^2$, $b = 2xy$. **[# 1]**

23. Zapište Laplaceovu rovnici

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

pomocí komplexních proměnných $z = x + \mathrm{i}\,y$ a $\bar{z} = x - \mathrm{i}\,y$. **[# 1]**

Převeďte do kanonického tvaru a řešte rovnice

24. $x^2 u_{xx} - y^2 u_{yy} - 2yu_y = 0.$ **[# 2]**

25. $x^2 u_{xx} - 2xyu_{xy} + y^2 u_{yy} + xu_x + yu_y = 0.$ **[# 2]**

III. Okrajová úloha pro obyčejné rovnice, Greenovy funkce

Řešte okrajovou úlohu pro následující obyčejné diferenciální rovnice

26. $(xy')' = 0 \quad x \in (1, \infty)$, $y(1) = y_0$, y je omezená pro $x \to \infty$, **[# 1]**

27. $y'' + \frac{2}{x} y' = 0 \quad x \in (1, \infty)$, $y(1) = y_0$, $\lim_{x\to\infty} y(x) = 0$, **[# 1]**

28. $-y'' = \sin x \quad x \in (0, 2\pi)$, $y(0) = y(2\pi)$. **[# 1]**

Najděte vlastní hodnoty a vlastní funkce pro okrajové úlohy.

29. $-y'' = \lambda y, \quad x \in (0, 2\pi), \quad y'(0) = y(2\pi) = 0.$ **[# 1]**

30. $-\left[(1 - x^2)y'\right]' = \lambda y$, $x \in (-1, 1)$, $\lim_{x\to\pm 1} y(x)$ jsou vlastní. **[# 3]**

31. $-xy'' + (x - 1)y' = \lambda y$, $x \in (0, \infty)$, přičemž existují vlastní limity $\lim_{x\to 0+} y(x)$ a $\lim_{x\to\infty} y(x)$. **[# 3]**

Řešte okrajové úlohy.

32. $-y'' - y = x(\pi - x),\ y(0) = y(\pi) = 0.$ **[# 1]**

33. $-y'' - \omega^2 y = f,\ x \in (0, \ell),\ y(0) = y(\pi) = 0.$ **[# 1]**

IV. Vlnová rovnice

34. Formulujte okrajovou podmínku pro levý konec polonekonečné struny, na nějž je připevněn kroužek, který klouže po tyči kolmé ke struně, v následujících situacích

(a) kroužek je nehmotný a pohybuje se po tyči bez tření, **[# 1]**

(b) kroužek má hmotnost m a pohybuje se bez tření, **[# 1]**

(c) kroužek má hmotnost m a tření je přímo úměrné rychlosti. **[# 1]**

Řešte vlnovou rovnici s počátečními a okrajovými podmínkami:

35. $u_{tt} - u_{xx} = 0,\ u(0,x) = \sin kx,\ u_t(0,x) = \mathrm{e}^{-\ell|x|},\ t > 0,\ x \in \mathbf{R}.$ **[# 1]**

36. $u_{tt} - u_{xx} = 0,\ u(t,0) = 0,\ u(0,x) = 0,\ u_t(0,x) = \cos kx,\ t > 0,\ x > 0.$ **[# 2]**

37. $u_{tt} - u_{xx} = \sin kx,\ u(0,x) = \mathrm{e}^{-\ell x},\ u_t(0,x) = 0,\ t > 0,\ x \in \mathbf{R}.$ **[# 2]**

38. Odvoďte zákon zachování energie pro polonekonečnou strunu s pevným koncem. **[# 3]**

39. Je dán zdroj harmonických oscilací o frekvenci ω pohybující se rychlostí $v < c$ po nekonečné struně, tj.

$$u|_{x=vt} = \sin \omega t.$$

Popište oscilace struny napravo a nalevo od zdroje. Podejte fyzikální vysvětlení tohoto jevu (Dopplerův efekt). **[# 4]**

V. Metoda integrálních transformací

40. Najděte řešení rovnice pro vedení tepla $u_t = u_{xx}$ pro $t > 0$ a $x \in \mathbf{R}$ vyhovující počáteční podmínce

$$u(0,x) = \begin{cases} 1 & x \in [-\ell, \ell] \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$ **[# 2]**

41. Najděte řešení rovnice pro vedení tepla $u_t = u_{xx}$ pro $t > 0$ a $x \in \mathbf{R}$ vyhovující počáteční podmínce

$$u(0,x) = \frac{1}{1+(ax)^2}.$$

42. Najděte řešení rovnice pro vedení tepla $u_t = u_{xx}$ pro $t > 0$ a $x > 0$ vyhovující počáteční podmínce $u(0,x) = 0$ a okrajové podmínce $u(t,0) = 1$. **[# 2]**

43. Najděte řešení rovnice pro vedení tepla $u_t = u_{xx}$ pro $t > 0$ a $x > 0$ vyhovující počáteční podmínce $u(0,x) = 0$ a okrajové podmínce $u(t,0) = \delta(t)$. **[# 2]**

VI. Metoda separace proměnných

44. Řešte vlnovou rovnici pro konečnou strunu, jež je upevněna na koncích, jejíž počáteční výchylka vytváří spolu s nenapjatou polohou struny rovnostranný trojúhelník a jejíž počáteční rychlost je nulová. **[# 2]**

45. Řešte vlnovou rovnici pro konečnou strunu, jež je na jednom konci upevněna, na druhém volná, jejíž počáteční rychlost vytváří spolu s nenapjatou polohou struny rovnostranný trojúhelník a jejíž počáteční výchylka je nulová. **[# 2]**

46. Řešte rovnici pro vedení tepla v tenké obruči tvaru kružnice, počáteční teplota vzhledem k polární souřadnici $\varphi \in (-\pi, \pi]$ nechť je

$$u(o,\varphi) = \begin{cases} 1, & \varphi \in (-\alpha, \alpha) \\ 0. & \text{jinak.} \end{cases}$$ **[# 3]**

47. Řešte Laplaceovu rovnici $u_{xx} + u_{yy} = 0$ na čtverci $(0,a) \times (0,b)$ s okrajovými podmínkami

$$\begin{aligned} u(0,y) &= Ay(b-y) \\ u(a,y) &= 0 \\ u(x,0) &= \sin\frac{\pi x}{a} \\ u(x,b) &= 0. \end{aligned}$$

48. Spočtěte obecně, jak bude chladnout homogenní koule za předpokladu, že počáteční rozložení teploty závisí pouze na vzdálenosti od středu koule. **[# 2]**

49. Řešte Laplaceovu rovnici na kruhu se středem v počátku soustavy souřadnic. Pro body (x,y) na hraniční kružnici nechť platí $u(x,y) = x^2 - y^2$. **[# 2]**

50. Řešte Laplaceovu rovnici na vnějšku kruhu se středem v počátku soustavy souřadnic. Pro body na hraniční kružnici nechť platí $u(x,y) = \mathrm{e}^{x+y}$. **[# 2]**

51. Řešte počáteční úlohu pro malé netlumené kmity kruhové membrány o poloměru R, jež je na okrajích upevněna (buben). Počáteční rychlost membrány nechť je nulová, počáteční výchylka v polárních souřadnicích (r,φ) s počátkem ve středu membrány nechť je $|\varphi|(R^2 - r^2)$. **[# 6]**