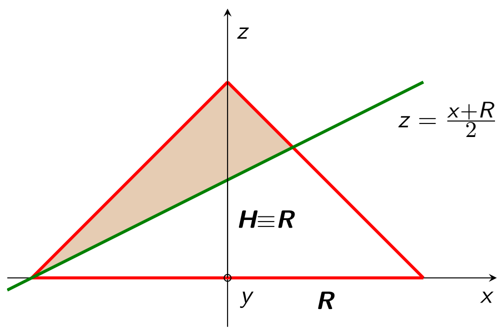
Řešení bonusového příkladu z distančních písemek (jaro 2020):

Zadání:
Vypočítejte objem tělesa $\mathcal{V}(x, y, z) : \left\{z \in \langle \frac{x+R}{2}, H - \sqrt{x^2+y^2}\rangle \wedge \sqrt{x^2+y^2}\big|_{z=0} = R\right\}$. Výsledek vyjádřete jako jeden člen (tj. nikoli jako součet více různých členů) pomocí parametrů R a H. Nakreslete zadané těleso. Jaký je podíl objemů zadaného tělesa a stejného tělesa, kde ovšem spodní mez pro z bude rovna nule?

Řešení:
Ze zadání vyplývá, že uvažované těleso $\mathcal{V}$ je shora omezené kuželovou plochou o výšce H rovné poloměru podstavy R a zespoda rovinnou plochou, která je rovnoběžná se směrem y, protíná osu kužele v polovině její výšky a prochází „patou" kužele v bodě $x = -R$. Zadané těleso je zvýrazněné barevnou plochou na schematickém obrázku 1.



Obrázek 1: Schematické zobrazení zadaného tělesa v rovině xz. Obrys kužele o poloměru podstavy R a výšce $H \equiv R$ je znázorněn červeně, spodní omezující rovinná plocha zeleně. Výsledné těleso je zvýrazněno okrovou (hnědou) plochou.

Objem tělesa vypočítáme integrací, nejlépe ve válcovém souřadném systému, tedy $\mathcal{V}(x, y, z) \to \mathcal{V}(r, \phi, z)$. Přímo ze zadání vyplývají následující meze integrace:

$$\phi \in \langle 0, 2\pi \rangle\,, \quad z \in \left\langle \frac{r\cos\phi + R}{2},\, R - r \right\rangle. \tag{1}$$

Poněkud složitější to bude s horní mezí integrace pro válcovou radiální souřadnici r, která v tomto případě není konstantní a je dána průnikem „zelené" rovinné plochy s „červenou" kuželovou plochou; porovnáním rovnic těchto dvou ploch (tj., z rovnosti horní a spodní meze pro z) vyplývá:

$$r \in \left\langle 0,\, \frac{R}{\cos\phi + 2} \right\rangle. \tag{2}$$

Jediným integrálem, nezávislým na ostatních souřadnicích, je tak integrál přes ϕ. Explicitní podoba trojného integrálu pro objem daného tělesa (viz rovnice 7.6 ve skriptech Početní praktikum) tedy bude

$$V = \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{\frac{R}{\cos\phi+2}} r \left(\int_{\frac{r\cos\phi+R}{2}}^{R-r} \mathrm{d}z \right) \mathrm{d}r \right] \mathrm{d}\phi, \tag{3}$$

kde r v integrandu „prostředního" integrálu (tedy integrálu radiální souřadnice, ohraničeného hranatou závorkou), je jakobiánem válcové soustavy.

Oba „vnitřní" integrály (přes z a r) jsou řešitelné snadno, dostáváme tak

$$V = \frac{R^3}{12} \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\phi}{(\cos\phi + 2)^2}. \tag{4}$$

Tento integrál je řešitelný univerzální substitucí $\operatorname{tg}(\phi/2) = t$, tedy $\cos\phi = (1-t^2)/(1+t^2)$, $\mathrm{d}\phi = 2\,\mathrm{d}t/(1+t^2)$, případně $\sin\phi = 2t/(1+t^2)$ (v tomto místě bylo také povoleno použít vhodný analytický software, například

Wolfram Alpha). Po dosazení bude mít integrand $\mathcal{I}$ rovnice (4), včetně vytknutých konstantních výrazů, tvar

$$\mathcal{I} = \frac{R^3\left(1+t^2\right)}{6\left(3+t^2\right)^2}. \tag{5}$$

Zásadní krok, vyžadující jistou „zběhlost“ či zkušenost, je ovšem v tomto místě spojen s transformací integračních mezí. Pokud totiž do univerzální substituce dosadíme stávající meze $\phi = 0$ a $\phi = 2\pi$, dostaneme nulovou horní i spodní mez pro novou proměnnou t (což souvisí s tím, že funkce $\operatorname{tg}(\phi/2)$ v intervalu $\langle 0, 2\pi\rangle$ obsahuje vnitřní singularitu přesně uprostřed tohoto intervalu, v bodě π). Podíváme-li se blíže na průběh funkce $(\cos\phi + 2)^{-2}$ (zkuste si jej vykreslit), vidíme, že je periodická s periodou 2π (s minimy v sudých a maximy v lichých násobcích π) a její funkční hodnoty jsou vždy kladné. Posuneme-li tedy obě meze souběžně o libovolný interval, musí být integrál (plocha pod křivkou) takové funkce stejný. Pokud změníme meze $\phi = 0$, $\phi = 2\pi$ v rovnici (4) na $\phi = -\pi$, $\phi = \pi$ (v tomto intervalu funkce $\operatorname{tg}(\phi/2)$ neobsahuje vnitřní singularitu, singularity jsou pouze v obou mezích), dostaneme integrál pro novou proměnnou t ve tvaru

$$V = \frac{R^3}{6}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1+t^2}{\left(3+t^2\right)^2}\,\mathrm{d}t. \tag{6}$$

Takový integrál lze již řešit poměrně snadno. V prvním kroku jej rozšíříme, například způsobem

$$V = \frac{R^3}{6}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{3+t^2}{\left(3+t^2\right)^2} - \frac{2}{\left(3+t^2\right)^2}\right]\mathrm{d}t = \frac{R^3}{6}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{3+t^2} - \frac{2}{\left(3+t^2\right)^2}\right]\mathrm{d}t. \tag{7}$$

První člen v integrandu poslední rovnice vyřešíme jednoduchou substitucí $t = \sqrt{3}\,u$. Pro druhý člen se nejlépe nabízí substituce $t = \sqrt{3}\operatorname{tg} v$ (a tedy $\mathrm{d}t = \sqrt{3}\,\mathrm{d}v/\cos^2 v$), což povede na následující součet dvou integrálů ve tvaru

$$V = \frac{R^3}{6}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} - \frac{2}{3\sqrt{3}}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2 v\,\mathrm{d}v\right), \tag{8}$$

Po jednoduché integraci a dosazení dostáváme výsledek,

$$V = \frac{\pi R^3}{9\sqrt{3}} \equiv \frac{\pi R^2 H}{9\sqrt{3}}. \tag{9}$$

Objem vyznačeného tělesa je tedy $(3\sqrt{3})^{-1}$ násobkem objemu celého kužele s parametry zadání.