Početní praktikum 2

jarní distanční zápočtová písemka - 3. července 2020

doba řešení - 360 minut

1. Vypočítejte vektorovou identitu: $\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{A} \right)$. (2,5 bodu)

   Výsledek: 0

2. Vypočítejte plošný integrál 1. druhu: $\iint_S x^2 z^2 \mathrm{d}S$, kde $S = \left\{ x^2 + y^2 + z^2 = R^2,\, z \geq 0 \right\}$. (2,5 bodu)

   Výsledek: $\frac{2}{15} \pi R^6$

3. Vypočítejte polohu středu hmotnosti plochy:
   $S = \left\{ x^2 + y^2 - z^2 = 0,\ z \in \langle 0, H \rangle \right\}$,
   jejíž plošná hustota σ je dána funkcí $\sigma = x^2 + z^2$. (2,5 bodu)

   Výsledek: $x_T = 0,\ y_T = 0,\ z_T = \frac{4H}{5}$

4. Plášť vodojemu ve tvaru kužele, stojícího „špičkou“ dolů, o poloměru horní vodorovné plochy $R = 3\,\mathrm{m}$ a výšce $H = 4\,\mathrm{m}$ je dimenzován tak, aby odolal celkové tlakové síle $10^6\,\mathrm{N}$. Je dimenzován dostatečně, nedostatečně, nebo je přibližně na hranici konstrukční odolnosti? Pro vyčíslení uvažujte zaokrouhlené hodnoty konstant $\rho = 1000\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$, $g = 10\,\mathrm{m\,s^{-2}}$, násobky π spočítejte přibližně. Vliv atmosférického tlaku zanedbejte. (2,5 bodu)

   Výsledek: $F_p \approx 6,3 \times 10^5\,\mathrm{N}$. Plášť vodojemu je dimenzován dostatečně.

5. Vypočítejte plošný integrál 2. druhu:
   $\iint_S (3, z, y) \cdot \mathrm{d}\vec{S}$, kde S je rovinná plocha ve tvaru obdélníka s vrcholy v bodech $(0, 0, 1)$, $(0, 2, 2)$, $(5, 2, 2)$, $(5, 0, 1)$, ve směru normály $\vec{\nu}$ této plochy jejíž složka ν_y je kladně orientovaná. (2,5 bodu)

   Výsledek: $-\frac{5}{2}$

6. Vypočítejte tok Φ vektorového pole $\vec{F}(x, y, z) = (x^2, 0, 0)$ uzavřenou plochou, tvořící povrch tělesa: $\mathcal{V} = \left\{ (x, y, z) \middle| \, x^2 + y^2 + z \leq 5,\, x \geq 0,\, y \leq 0,\, z \geq 1 \right\}$. (2,5 bodu)

   Výsledek: $\frac{56}{5}$

7. Pomocí Stokesovy věty určete práci síly $\vec{F} = (y^2, xz, y^2)$ působící po obvodu plochy dané předpisem $S = \left\{ (x, y, z) \middle| x^2 + y^2 \leq R^2,\, z = 6 \right\}$, po vykonání 1 okruhu z bodu $(R, 0, 6)$ do stejného bodu, v matematicky záporném směru. (2,5 bodu)

   Výsledek: $6\pi R^2$

8. Napište Taylorův polynom 2. stupně funkce $f(x, y) = \sqrt{\mathrm{e}^{2x} - y^2 + 1}$ v bodě $(0, 1)$. (2,5 bodu)

   Výsledek: $2 + x - y + \frac{1}{2} \left[x^2 + 2x(y-1) - 2(y-1)^2 \right]$

9. Rozviňte zadanou funkci $f(x) = \sin x \cos x$, $x \in \langle -1, 1)$, do Fourierovy řady. (2,5 bodu)

Výsledek: $\pi \sin(2) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k(-1)^k}{4 - k^2\pi^2} \sin(k\pi x)$

10. Zadané číslo $\sqrt{-6 + \frac{6\,\mathrm{i}}{\sqrt{3}}}$ napište v goniometrickém i v exponenciálním tvaru. (2,5 bodu)

Výsledek: $\pm\left(\frac{12}{\sqrt{3}}\right)^{1/2}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)\right], \qquad \pm\left(\frac{12}{\sqrt{3}}\right)^{1/2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{5\pi}{12}\right)}, \qquad k = 0, 1.$

11. Pomocí Cauchy-Riemannových podmínek ověřte, jestli funkce $f(z) = \ln\left(\frac{z+1}{\mathrm{i}}\right)$, $z \in \mathbb{C}$, může být holomorfní na otevřených podmnožinách komplexní roviny $\mathbb{C}$. (2,5 bodu)

Výsledek: $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{x+1}{(x+1)^2 + y^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{y}{(x+1)^2 + y^2},$

Cauchy-Riemannovy podmínky jsou splněny.

12. Tzv. tenzor viskózního (střihového) napětí σ_{ij} lze zapsat formou

$$\sigma_{ij} = \eta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) + \lambda \frac{\partial v_k}{\partial x_k}\delta_{ij},$$

kde v_i jsou složky vektoru rychlosti, η a λ jsou konstanty (koeficient dynamické viskozity, koeficient dilatační viskozity). Napište explicitní podobu prvků σ_{xx} a σ_{xy} tohoto tenzoru a také divergenci tohoto tenzoru (v kartézské soustavě) pomocí Einsteinovy a vektorové symboliky. (2,5 bodu)

Výsledek:

$$\sigma_{xx} = 2\eta\frac{\partial v_x}{\partial x} + \lambda\vec{\nabla}\cdot\vec{v},$$

$$\sigma_{xy} = \eta\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right),$$

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \eta\left(\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_i \partial x_j}\right) + \lambda\frac{\partial^2 v_k}{\partial x_i \partial x_k} \qquad \text{(Einsteinova notace)},$$

$$\vec{\nabla}\cdot\boldsymbol{\sigma} = \eta\Delta\vec{v} + (\eta+\lambda)\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot v) \qquad \text{(vektorový zápis)}.$$

Bonusový příklad:

Vypočítejte objem tělesa $\mathcal{V}(x,y,z)$: $\left\{z \in \langle \frac{x+R}{2}, H - \sqrt{x^2+y^2}\rangle \wedge \sqrt{x^2+y^2}\Big|_{z=0} = R\right\}$. Výsledek vyjádřete jako jeden člen (tj. nikoli jako součet více různých členů) pomocí parametrů R a H. Nakreslete zadané těleso. Jaký je podíl objemů zadaného tělesa a stejného tělesa, kde ovšem spodní mez pro z bude rovna nule? (5 bodů)

(Poznámka: pokud vám vyjde záporný výsledek, je to samozřejmě špatně a je třeba se nad řešením lépe zamyslet. Pro integraci složitějších výrazů můžete použít vhodný analytický volně dostupný software, například Wolfram Alpha; vyznačte potom ale místo v řešení, kde jste ho použili a uveďte, jakou metodou by se integrál mohl řešit.)