

ZMMF 3: domácí úloha 3B

Úlohu odevzdejte do 15. ledna 2024

1) Vypracujte numerické řešení (obyčejné diferenciální) Lane-Emdenovy rovnice stupně 3/2,

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{2}{x} \frac{\partial y}{\partial x} + y^{3/2} = 0, \quad (1)$$

s okrajovými podmínkami $y(0) = 1$, $\frac{\partial y}{\partial x}(0) = 0$, metodou **Runge-Kutta 4. řádu** (RK4), pro $x \in (0,4)$ a $\Delta x = 10^{-2}$ (hodnota “výpočetního kroku” na x -ové ose). Jako nejnižší hodnotu x ve výpočetní oblasti nezaďávejte nulu nýbrž Δx , vzhledem k tomu, že v prostředním členu rovnice se x nachází ve jmenovateli.

V části řešení se vám (pravděpodobně) vypíšou vypočítané hodnoty y jako NaN (not a number); to je způsobené tím, že by zde reálná funkční hodnota klesla do “záporných čísel”, což vzhledem k poločíselné mocnině y nemůže. Protože počítaná funkce y ve “fyzikální realitě” většinou vyjadřuje nezáporné stavové veličiny jako je hustota, tlak a teplota, řešení je tak v pořádku. **Vykreslete** také jeho graf v oblasti, kde $y \geq 0$.

2) Vypracujte numerické řešení parciální diferenciální, tzv. Burgersovy rovnice 1. řádu,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (2)$$

kde $c = 0,5$ je konstantní rychlost advekce tekutiny (tato lineární pohybová rovnice je částí jednorozměrného Navier-Stokesova řešení bez silových účinků), pro $t \in \langle 0,100 \rangle$ a $x \in \langle 0,100 \rangle$ (zde zahrňte i bod $x = 0$ do výpočetní oblasti). Časový krok $\Delta t \leq 1$ a prostorový krok $\Delta x \leq 1$ zvolte podle svého uvážení, ovšem tak aby byla splněna tzv. **Courantova podmínka**. Implementujte tzv. **upwind schéma**. Počáteční profil uvažujte jako

$$u(0,x) = \frac{1}{2} e^{-x^2} \quad (3)$$

a okrajové podmínky zadejte následující: $u(t,0) = u(0,0) = u_0$ (“fixní”, tzv. vtoková neboli *inflow* podmínka), kdežto $u(t,100)$ zvolte jako tzv. volnou (*outflow*) podmínku s *lineární* extrapolací (kdy rozdíl mezi $u(t,100)$ a u pro nejbližší sousední x -ovou hodnotu sítě je stejný jako rozdíl u pro toto a ještě následující x). **Vykreslete** pomocí vhodného programu (Gnuplot, Matplotlib, atd.) průběh řešení během zadaného časového intervalu.

K vypracování úlohy použijte libovolný programovací jazyk.