Početní praktikum 1

1a. zápočtová písemka - podzim 2020

doba řešení - 90 minut, výsledky jsou červeně vyznačené

1. Vypočítejte derivaci funkce $x^{ax} \cdot \dfrac{\sin x - \operatorname{tg} x}{\sqrt{x^2+a^2}}$, kde a je kladná konstanta. (2,5 bodu)

   $\dfrac{x^{ax}}{\sqrt{x^2+a^2}} \left[(\sin x - \operatorname{tg} x) \left(a \ln x + a - \dfrac{x}{x^2+a^2} \right) + \cos x - \dfrac{1}{\cos^2 x} \right]$

2. Vypočítejte integrál funkce $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin x \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x \sin^2 x)\,\mathrm{d}x$. (2,5 bodu)

   $-\dfrac{1}{2}\cos^2 x + \cos x + \dfrac{1}{\cos x} + \ln(\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = -\dfrac{7}{4} + \dfrac{3}{\sqrt{2}} - \dfrac{\ln 2}{2}$

3. Válcová nádoba o poloměru R a výšce H je zcela vyplněna plynem, jehož tlak směrem vzhůru klesá. Pokles tlaku je vyjádřen funkcí $p = p_0 \dfrac{4}{h^2+4}$, kde p_0 je tlak plynu na dně válce, h je svislá vzdálenost ode dna válce. Vypočítejte celkovou sílu, kterou plyn působí na (všechny) stěny nádoby. (2,5 bodu)

   $M = \pi p_0 R \left[R \left(1 + \dfrac{4}{H^2+4} \right) + 4 \operatorname{arctg}\left(\tfrac{H}{2}\right) \right]$

4. Vektor $\vec{a}$ má v *ortonormální* bázi $\mathcal{B}$ složky $(1,1,3)$. Přechod mezi bázemi $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ je dán vztahy

   $$\vec{e}_1 = \vec{e}'_1 - 2\vec{e}'_2, \qquad \vec{e}_2 = 2\vec{e}'_1 - \vec{e}'_2 + \vec{e}'_3, \qquad \vec{e}_3 = \vec{e}'_2.$$

   Určete matici T přechodu z báze $\mathcal{B}$ do báze $\mathcal{B}'$, matici S přechodu z báze $\mathcal{B}'$ do báze $\mathcal{B}$ a složky vektoru $\vec{a}$ v bázi $\mathcal{B}'$. Je báze $\mathcal{B}'$ ortonormální? (2,5 bodu)

   $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$, $S = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_{(\mathcal{B}')} = (3,0,1)$, báze $\mathcal{B}'$ není ortonormální.