

Počtení praktikum 1: 1. písemka - podzim 2022

1. Vypočítejte derivaci zadané funkce:

$$f(x) = \left(x\sqrt{1+x^2}\right)^{1-1/x}.$$

Určete definiční obory zadané i výsledné funkce. (2,5 bodu)

$$\text{Výsledek: } f'(x) = \left(x\sqrt{1+x^2}\right)^{1-1/x} \left[\frac{\ln(x\sqrt{1+x^2})}{x^2} + \frac{(x-1)(1+2x^2)}{x^2(1+x^2)} \right], \quad x > 0$$

2. Vypočítejte určitý integrál

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^3 + x^2 + x + 1}.$$

Porovnejte definiční obory zadané funkce (integrandu) a primitivní funkce. (2,5 bodu)

$$\text{Výsledek: } \frac{1}{2} \left(\ln \frac{|x+1|}{\sqrt{x^2+1}} + \arctg x \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{4} \left(\ln 2 + \frac{\pi}{2} \right), \quad x \neq -1$$

3. Vypočítejte hmotnost m kovové koule o poloměru R , zhotovené ze speciální slitiny, jejíž hustota uvnitř koule klesá jako $\rho = \rho_0 e^{-r}$, kde ρ_0 je hustota ve středu koule a r je vzdálenost od středu koule. Jaká bude hmotnost takové koule, pokud její poloměr vzroste „nade všechny meze“? (2,5 bodu)

$$\text{Výsledek: } m = 4\pi\rho_0 \{ 2 [1 - e^{-R}(1+R)] - R^2 e^{-R} \}, \quad m_{R \rightarrow \infty} = 8\pi\rho_0$$

4. Vektor \vec{a} má v ortonormální bázi \mathcal{B} složky $(1, 1, 1)$. Přejít mezi bázemi \mathcal{B} a \mathcal{B}' je dán vztahy

$$\vec{e}'_1 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3, \quad \vec{e}'_2 = 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3, \quad \vec{e}'_3 = \vec{e}_1 + \vec{e}_3.$$

Určete matici \mathbf{T} přechodu z báze \mathcal{B} do báze \mathcal{B}' , matici \mathbf{S} přechodu z báze \mathcal{B}' do báze \mathcal{B} a složky vektoru \vec{a} v bázi \mathcal{B}' . Je báze \mathcal{B}' ortonormální (uveďte důvody pro nebo proti)? (2,5 bodu)

$$\text{Výsledek: } \mathbf{T} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_{(\mathcal{B}')} = \left(-\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}\right)$$

Báze \mathcal{B} ani \mathcal{B}' nejsou ortonormální, matice \mathbf{T} a \mathbf{S} nemají determinanty ± 1 a nejsou vzájemně transponované.