

Početni praktikum 1

1. zápočtová písemka - podzim 2023 (čas řešení 90 minut)

1. Vypočítejte derivaci funkce $(a \ln x)^{\ln(\operatorname{tg} x)} \frac{1}{1 + \sqrt{x}}$, kde a je konstanta. Určete definiční obor zadané funkce. (Výsledky nemusíte nijak upravovat nebo zkrášlovat, stačí uvést správně zderivované zadání v syrovém tvaru.) (2,5 bodu)

Výsledek: $\frac{(a \ln x)^{\ln(\operatorname{tg} x)}}{(1 + \sqrt{x})} \left\{ \left[\frac{\ln(\operatorname{tg} x)}{x \ln x} + \frac{\ln(a \ln x)}{\sin x \cos x} \right] - \frac{1}{2\sqrt{x}(1 + \sqrt{x})} \right\}, x \in \pi \left(k, k + \frac{1}{2} \right), k \in \mathbb{N}^0$

2. Vypočítejte integrál $\int_0^{\pi/4} 2 \operatorname{tg}^3 x \, dx$. (2,5 bodu)
- Výsledek: $1 - \ln 2$

3. Nevodivý váleček o poloměru R a výšce H je elektricky nabitý s objemovou hustotou náboje ρ . Vypočítejte celkový elektrický náboj Q válečku (pokud by $\rho = \text{konst.}$, potom $Q = \rho V$, kde V je objem válečku), pokud

$$\rho = A e^{-\frac{r+1}{2}} + B[(r+1)^2 - 1],$$

kde A, B jsou kladné konstanty a r je vzdálenost od osy válečku. (2,5 bodu)

Výsledek: $Q = \pi H \left\{ 4A e^{-\frac{1}{2}} \left[2 - e^{-\frac{R}{2}} (R + 2) \right] + B \left(\frac{R^4}{2} + \frac{4R^3}{3} \right) \right\}$

4. Vektor $\vec{a}$ má v ortonormální bázi $\mathcal{B}$ složky $(1, 2, -1)$. Přejít mezi bázemi $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ je dán vztahy

$$\vec{e}'_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_2 - \vec{e}_3), \quad \vec{e}'_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3), \quad \vec{e}'_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(2\vec{e}_1 - \vec{e}_2 - \vec{e}_3).$$

Určete matici $\mathbf{T}$ přechodu z báze $\mathcal{B}$ do báze $\mathcal{B}'$, matici $\mathbf{S}$ přechodu z báze $\mathcal{B}'$ do báze $\mathcal{B}$ a složky vektoru $\vec{a}$ v bázi $\mathcal{B}'$. Je báze $\mathcal{B}'$ ortonormální (uveďte důvody pro nebo proti)? Určete velikosti vektoru $\vec{a}$ v obou bázích. (2,5 bodu)

Výsledek: $\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T} = \mathbf{S}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = \mathbf{S}^T, \quad \vec{a}_{(\mathcal{B}')} = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{2}} & \frac{2}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$

Báze $\mathcal{B}'$ je ortonormální, matice přechodu $\mathbf{T}, \mathbf{S}$ mají jednotkový determinant a obě matice jsou vzájemně transponované, $\|\vec{a}_{(\mathcal{B})}\| = \|\vec{a}_{(\mathcal{B}')}\| = \sqrt{6}$.