

Početní praktikum 1

1/0 zápočtová písemka

dobu řešení - 60 minut

1. Vypočítejte derivaci funkce $f(x) = e^{ax \cos x} \frac{a \sin bx - b \cos bx}{\sqrt{ax^2 + b^2}}$, kde a, b jsou kladné konstanty. (2,5 bodu)

Výsledek: $f'(x) = e^{ax \cos x} \left[\frac{a \sin bx - b \cos bx}{\sqrt{ax^2 + b^2}} \left(a \cos x - ax \sin x - \frac{ax}{ax^2 + b^2} \right) + \frac{ab \cos bx + b^2 \sin bx}{\sqrt{ax^2 + b^2}} \right]$.

2. Vypočítejte integrál funkce $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x \, dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$. (2,5 bodu)

Výsledek: $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$.

3. Válcová nádoba o poloměru R a výšce H je zcela vyplněna plynem, jehož tlak směrem vzhůru klesá. Pokles tlaku je vyjádřen funkcí $p = p_0 e^{-\frac{h}{20}}$, kde p_0 je tlak plynu na dně válce, h je svislá vzdálenost ode dna válce. Vypočítejte celkovou sílu, kterou plyn působí na (všechny) stěny nádoby¹. (2,5 bodu)

Výsledek: $40 p_0 \pi R \left(1 - e^{-\frac{H}{20}} \right) + p_0 \pi R^2 \left(1 + e^{-\frac{H}{20}} \right)$.

4. Vektor $\vec{a}$ má v *ortonormální* bázi $\mathcal{B}$ složky $(1, 0, -2)$. Přechod mezi bázemi $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ je dán vztahy

$$\begin{aligned}\vec{e}_1 &= -\vec{e}'_1 + \vec{e}'_2 - \vec{e}'_3, \\ \vec{e}_2 &= \vec{e}'_1 + 2\vec{e}'_3, \\ \vec{e}_3 &= \vec{e}'_1 + \vec{e}'_2 + 2\vec{e}'_3.\end{aligned}$$

Určete matici T přechodu z báze $\mathcal{B}$ do báze $\mathcal{B}'$, matici S přechodu z báze $\mathcal{B}'$ do báze $\mathcal{B}$ a složky vektoru $\vec{a}$ v bázi $\mathcal{B}'$. Je báze $\mathcal{B}'$ ortonormální? (2,5 bodu)

$T = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, S = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \vec{a}_{(\mathcal{B}')} = (-3, -1, -5),$ báze $\mathcal{B}'$ není ortonormální.

¹Ve výsledcích příkladů s fyzikálními veličinami nejsou uváděny příslušné jednotky.