

# Počtení praktikum 1

## 1a. zápočtová písemka

doba řešení - 60 minut

1. Vypočítejte derivaci funkce  $x^{\ln(\sin x)} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ . Určete průnik definičních oborů zadané a výsledné funkce. (2,5 bodu)

Výsledek:  $x^{\ln(\sin x)} \left[ \frac{\ln(\sin x) + x \ln x \cot x}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}} \right]$ ,  $x > 0 \wedge x \in (2k, 2k+1)\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$

2. Vypočítejte integrál funkce  $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{x \, dx}{(\cos^2 x - \sin^2 x)^2}$ . (2,5 bodu)

Výsledek:  $\frac{1}{4} \left( \frac{\pi}{\sqrt{3}} - \ln 2 \right)$

3. Kruhová deska o poloměru  $R$  je elektricky nabitá s plošnou hustotou náboje  $\sigma$ . Vypočítejte celkový elektrický náboj  $Q$  desky (pokud by  $\sigma = \text{konst.}$ , potom  $Q = \sigma S$  kde  $S$  je plocha desky), pokud

$$\sigma = A e^{-\frac{r^2}{3}} + Br,$$

kde  $A, B$  jsou kladné konstanty a  $r$  je vzdálenost od středu desky. (2,5 bodu)

Výsledek:  $Q = 3\pi A \left( 1 - e^{-\frac{R^2}{3}} \right) + \frac{2}{3}\pi BR^3$

4. Vektor  $\vec{a}$  má v ortonormální bázi  $\mathcal{B}'$  složky  $(0, -2, 1)$ . Přejít mezi bázemi  $\mathcal{B}$  a  $\mathcal{B}'$  je dán vztahy

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 &= \vec{e}'_1 - \vec{e}'_2 - 2\vec{e}'_3, \\ \vec{e}_2 &= 2\vec{e}'_1 - \vec{e}'_2 + \vec{e}'_3, \\ \vec{e}_3 &= -\vec{e}'_1 + \vec{e}'_2 + 3\vec{e}'_3. \end{aligned}$$

Určete matici  $\mathbf{T}$  přechodu z báze  $\mathcal{B}$  do báze  $\mathcal{B}'$ , matici  $\mathbf{S}$  přechodu z báze  $\mathcal{B}'$  do báze  $\mathcal{B}$  a složky vektoru  $\vec{a}$  v bázích  $\mathcal{B}$  a  $\mathcal{B}'$ . Jsou báze  $\mathcal{B}$  a  $\mathcal{B}'$  ortonormální (uved'te důvod)? (2,5 bodu)

Výsledek:  $\mathbf{T} = \begin{pmatrix} -4 & 1 & -3 \\ -7 & 1 & -5 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{a}_{(\mathcal{B}')} = (0, -2, 1)$ ,  $\vec{a}_{(\mathcal{B})} = (15, -2, 11)$

Báze  $\mathcal{B}'$  je ortonormální (ze zadání), Báze  $\mathcal{B}$  není ortonormální, matice přechodu  $\mathbf{T}$  nemá jednotkový determinant a obě matice nejsou vzájemně transponované.