Početní praktikum 1

1a. zápočtová písemka

1. Vypočítejte derivaci funkce $x^{\ln\left(\frac{1}{\sin x}\right)} \dfrac{x}{\sqrt{1-4x^2}}$. Určete průnik definičních oborů zadané a výsledné funkce. (2,5 bodu)

Výsledek: $x^{\ln\left(\frac{1}{\sin x}\right)} \left[\dfrac{1}{(1-4x^2)^{3/2}} - \dfrac{\ln(\sin x) + x \ln x \operatorname{cotg} \mathrm{x}}{\sqrt{1-4x^2}}\right]$, $x \in \left(0, \dfrac{1}{2}\right)$

2. Vypočítejte integrál funkce $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sin^2(2x)}$. (2,5 bodu)

Výsledek: $\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{2\pi}{3\sqrt{3}} - \ln\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)$

3. Kruhová deska o poloměru R je elektricky nabitá s plošnou hustotou náboje σ. Vypočítejte celkový elektrický náboj Q desky (pokud by $\sigma = \text{konst.}$, potom $Q = \sigma S$ kde S je plocha desky), pokud

$$\sigma = A\,\mathrm{e}^{-\frac{r^2}{5}} + Br^2,$$

kde A, B jsou kladné konstanty a r je vzdálenost od středu desky. (2,5 bodu)

Výsledek: $Q = 5\pi A\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{R^2}{5}}\right) + \dfrac{\pi B R^4}{2}$

4. Vektor $\vec{a}$ má v *ortonormální* bázi $\mathcal{B}$ složky $(1, 1, 1)$. Přechod mezi bázemi $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ je dán vztahy

$$\vec{e}\,'_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3), \quad \vec{e}\,'_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_2 - \vec{e}_3), \quad \vec{e}\,'_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(2\vec{e}_1 - \vec{e}_2 - \vec{e}_3).$$

Určete matici $\mathbf{T}$ přechodu z báze $\mathcal{B}$ do báze $\mathcal{B}'$, matici $\mathbf{S}$ přechodu z báze $\mathcal{B}'$ do báze $\mathcal{B}$ a složky vektoru $\vec{a}$ v bázi $\mathcal{B}'$. Je báze $\mathcal{B}'$ ortonormální (uveďte důvody pro nebo proti) ? (2,5 bodu)

Výsledek: $\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$, $\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = \mathbf{T}^T$, $\vec{a}_{(\mathcal{B}')} = (\sqrt{3}, 0, 0)$

Báze $\mathcal{B}'$ je ortonormální, matice přechodu T, S mají jednotkový determinant a obě matice jsou vzájemně transponované.