Početní praktikum 1

1a. zápočtová písemka - podzim 2019

1. Vypočítejte derivaci funkce $x^{2\ln^2 x}\,\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$. Určete průnik definičních oborů zadané a výsledné funkce. (2,5 bodu)

Výsledek: $x^{2\ln^2 x-\frac{3}{2}}\left[6\ln^2 x\left(\sqrt{x}+1\right)-\dfrac{1}{2}\right], \quad x>0$

2. Vypočítejte integrál $\displaystyle\int_0^2\left(\frac{x^4}{x^2+4}+\frac{4}{4-x}\right)\mathrm{d}x$. Určete průnik definičních oborů funkce zadané v integrandu a primitivní funkce. (2,5 bodu)

Výsledek: $2\pi-\dfrac{16}{3}+\ln 16, \quad x\neq 4$

3. Nevodivá koule o poloměru R je elektricky nabitá s objemovou hustotou náboje ρ. Vypočítejte celkový elektrický náboj Q koule (pokud by platilo $\rho=$ konst., potom $Q=\rho V$, kde V je objem koule), pokud

$$\rho = A\,\mathrm{e}^{-Br^3}+Cr,$$

kde A, B, C jsou kladné konstanty a r je radiální vzdálenost od středu koule. (2,5 bodu)

Výsledek: $Q=\pi\left[\dfrac{4A}{3B}\left(1-\mathrm{e}^{-BR^3}\right)+CR^4\right]$

4. Vektor $\vec{a}$ má v *ortonormální* bázi $\mathcal{B}$ složky $(1,2,-1)$. Přechod mezi bázemi $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ je dán vztahy

$$\vec{e_1}'=\vec{e}_1+\vec{e}_2+\vec{e}_3,\quad \vec{e_2}'=\vec{e}_1+\vec{e}_3,\quad \vec{e_3}'=-\vec{e}_1+\vec{e}_2.$$

Určete matici $\boldsymbol{T}$ přechodu z báze $\mathcal{B}$ do báze $\mathcal{B}'$, matici $\boldsymbol{S}$ přechodu z báze $\mathcal{B}'$ do báze $\mathcal{B}$ a složky vektoru $\vec{a}$ v bázi $\mathcal{B}'$. Je báze $\mathcal{B}'$ ortonormální (uveďte důvody pro nebo proti) ? (2,5 bodu)

Výsledek: $\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&1\\-1&1&0\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{S}=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\1&-1&0\\-1&2&1\end{pmatrix}, \quad \vec{a}_{(\mathcal{B}')}=(4,-5,-2)$

Báze $\mathcal{B}'$ není ortonormální, matice přechodu $\boldsymbol{T}$, $\boldsymbol{S}$, mají (záporný) jednotkový determinant ale obě matice nejsou vzájemně transponované.