

## Počtení praktikum 1: první(a) písemka - podzim 2021

1. Vypočítejte derivaci funkce  $f(x) = (\sin x)^{x\sqrt{1+x^2}} \sqrt{1 - \frac{1}{x}}$   
(derivovanou funkci  $f'(x)$  nemusíte dále upravovat ani zjednodušovat, stačí její hrubá podoba, avšak kompletně a správně zderivovaná). (2,5 bodu)

Výsledek:  $f'(x) = (\sin x)^{x\sqrt{1+x^2}} \times$   
 $\times \left\{ \sqrt{1 - \frac{1}{x}} \left[ x\sqrt{1+x^2} \cotg x + \sqrt{1+x^2} \ln(\sin x) + \frac{x^2 \ln(\sin x)}{\sqrt{1+x^2}} \right] + \frac{1}{2x^{3/2}\sqrt{x-1}} \right\}$

2. Vypočítejte neurčitý integrál  $\int \frac{x^2}{x^2+x+2} dx$ . Jsou něčím omezené definiční obory zadaného integrandu a výsledné primitivní funkce? (2,5 bodu)

Výsledek:  $x - \ln \sqrt{x^2+x+2} - \frac{3}{\sqrt{7}} \arctg\left(\frac{2x+1}{\sqrt{7}}\right) + C, \quad x \in \mathbb{R}$

3. Válec o poloměru  $R$  a výšce  $H$  je vyroben z materiálu, jehož hustota  $\rho$  se mění podle funkce  $\rho = 5 \cos r$ , kde  $r$  je vzdálenost od osy válce. Vypočítejte hmotnost  $M$  válce. Vyčíslete také přibližnou hmotnost válce, pokud  $R = 1$ ,  $H = 1$  a pokud zaokrouhlíme  $\pi \approx 3$ ,  $\sin(1) \approx 0,8$  a  $\cos(1) \approx 0,6$ .<sup>1</sup> (2,5 bodu)

Výsledek:  $M = 10\pi H (R \sin R + \cos R - 1) \approx 12, \quad R \leq \frac{\pi}{2}$

4. Vektor  $\vec{v}$  má ve *standardní ortonormální* bázi  $\mathcal{E}$  v  $\mathbb{R}^3$  složky  $(1, -1, 0)$ . Dále jsou definovány dvě báze,  $\mathcal{B}$  a  $\mathcal{B}'$ , kdy přechody mezi bázemi  $\mathcal{E}$  a  $\mathcal{B}$  a mezi bázemi  $\mathcal{B}$  a  $\mathcal{B}'$  jsou dány

$$\begin{array}{lcl} \vec{f}'_1 = 2\vec{e}_1 & - & \vec{e}_3, \\ \vec{f}'_2 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 & , & \\ \vec{f}'_3 = \vec{e}_1 & - & \vec{e}_3, \end{array} \quad \begin{array}{lcl} \vec{f}_1 = \vec{f}'_1 & - & 2\vec{f}'_3, \\ \vec{f}_2 = \vec{f}'_2 + \vec{f}'_3, & & \\ \vec{f}_3 = \vec{f}'_1 & - & \vec{f}'_3, \end{array}$$

kde  $\vec{e}_i$  jsou bázové vektory báze  $\mathcal{E}$ ,  $\vec{f}_i$  jsou bázové vektory báze  $\mathcal{B}$  a  $\vec{f}'_i$  jsou bázové vektory báze  $\mathcal{B}'$ . Určete matici  $\mathbf{T}$  přechodu z báze  $\mathcal{E}$  do báze  $\mathcal{B}$ , matici  $\mathbf{S}$  přechodu z báze  $\mathcal{B}$  do báze  $\mathcal{E}$  (směrovou konvenci zvolte dle vlastní preference, vyznačte ji ale do řešení) a složky vektoru  $\vec{v}$  v bázích  $\mathcal{B}$  a  $\mathcal{B}'$ . Jsou báze  $\mathcal{B}$  a  $\mathcal{B}'$  ortonormální (zdůvodněte)?

(2,5 bodu)

Výsledek:  $\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \vec{a}_{(\mathcal{B})} = (-1, -1, 3), \vec{a}_{(\mathcal{B}')} = (2, -1, -2),$

$\mathcal{B}$  a  $\mathcal{B}'$  nejsou ortonormální

---

<sup>1</sup>Veličiny jsou uváděny pouze jako velikost, nejsou uváděny příslušné jednotky.