

# Početni praktikum 1

## 1b. zápočtová písemka - podzim 2020

dobu řešení - 90 minut, výsledky jsou červeně vyznačené

1. Vypočítejte derivaci funkce  $x^{\ln x} \frac{\sin x - \cos x}{x^2 + \operatorname{tg}^2 x}$ . (2,5 bodu)

$$2x^{\ln x} \frac{\ln x}{x} \frac{\sin x - \cos x}{x^2 + \operatorname{tg}^2 x} + x^{\ln x} \left[ \frac{\sin x + \cos x}{x^2 + \operatorname{tg}^2 x} - 2 \frac{\sin x - \cos x}{(x^2 + \operatorname{tg}^2 x)^2} \left( x + \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x} \right) \right]$$

2. Vypočítejte integrál funkce  $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{\sin^2 x + x + 1}{\operatorname{tg}^2 x} dx$ . (2,5 bodu)

$$\frac{\sin(2x)}{4} + \ln |\sin x| - \left( \cotg x + \frac{x}{2} \right) (x + 1) \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} = \frac{3}{2} + \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi^2}{4}$$

3. Válcové těleso o poloměru  $R$  a výšce  $H$  je vyrobené z materiálu jehož hustota směrem od osy klesá. Pokles hustoty je vyjádřen funkcí  $\rho = \frac{\rho_0}{2} (e^{-r^2} + 1)$ , kde  $\rho_0$  je hustota v ose válce a  $r$  je vzdálenost od osy válce. Vypočítejte hmotnost  $M$  válce. (2,5 bodu)

$$M = \frac{\pi \rho_0 H}{2} (1 + R^2 - e^{-R^2})$$

4. Vektor  $\vec{a}$  má v ortonormální bázi  $\mathcal{B}$  složky  $(1, -1, -2)$ . Přejchod mezi bázemi  $\mathcal{B}$  a  $\mathcal{B}'$  je dán vztahy

$$\vec{e}_1 = \vec{e}'_1 - 2\vec{e}'_2 + \vec{e}'_3, \quad \vec{e}_2 = 2\vec{e}'_1 - \vec{e}'_2, \quad \vec{e}_3 = \vec{e}'_2.$$

Určete matici  $T$  přechodu z báze  $\mathcal{B}$  do báze  $\mathcal{B}'$ , matici  $S$  přechodu z báze  $\mathcal{B}'$  do báze  $\mathcal{B}$  a složky vektoru  $\vec{a}$  v bázi  $\mathcal{B}'$ . Je báze  $\mathcal{B}'$  ortonormální? (2,5 bodu)

$$T = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_{(\mathcal{B}')} = (-1, -3, 1), \quad \text{báze } \mathcal{B}' \text{ není ortonormální.}$$