

Početní praktikum 1

1b. zápočtová písemka

dobu řešení - 60 minut

1. Vypočítejte derivaci funkce $x^{\sin(\ln x)} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$. Určete průnik definičních oborů zadané a výsledné funkce. (2,5 bodu)

Výsledek: $x^{\sin(\ln x)} \frac{(x^2 + 1) [\sin(\ln x) + \ln x \cos(\ln x)] - 1}{x^2 \sqrt{1+x^2}}, x > 0$

2. Vypočítejte integrál funkce $\int_0^1 x \operatorname{arctg}(x^2 + 1) dx$. (2,5 bodu)

Výsledek: $\operatorname{arctg} 2 - \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} \ln \frac{2}{5}$

3. Válec o poloměru R a výšce H je elektricky nabitý s objemovou hustotou náboje ρ . Vypočítejte celkový elektrický náboj Q válce (pokud by $\rho = \text{konst.}$, potom $Q = \rho V$ kde V je objem válce), pokud

$$\rho = A \ln(3r^2 + B) + Ar,$$

kde A, B jsou kladné konstanty a r je vzdálenost od osy válce. (2,5 bodu)

Výsledek: $Q = \frac{\pi AH}{3} [(3R^2 + B) \ln(3R^2 + B) - B \ln B + 2R^3 - 3R^2]$

4. Vektor $\vec{a}$ má v ortonormální bázi $\mathcal{B}'$ složky $(-1, 1, -1)$. Přejchod z báze $\mathcal{B}'$ do báze $\mathcal{B}$ je dán vztahy

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 &= \vec{e}'_1 - 2\vec{e}'_2 + 2\vec{e}'_3, \\ \vec{e}_2 &= -\vec{e}'_2 + 3\vec{e}'_3, \\ \vec{e}_3 &= -\vec{e}'_1 + \vec{e}'_2. \end{aligned}$$

Určete matici T přechodu z báze $\mathcal{B}$ do báze $\mathcal{B}'$, matici S přechodu z báze $\mathcal{B}'$ do báze $\mathcal{B}$ a složky vektoru $\vec{a}$ v bázích $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$. Jsou báze $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ ortonormální (uved'te důvod)? (2,5 bodu)

Výsledek: $T = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -4 \\ -3 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, S = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \vec{a}_{(\mathcal{B}')} = (-1, 1, -1), \vec{a}_{(\mathcal{B})} = (1, -1, 2),$

Báze $\mathcal{B}'$ je ortonormální (ze zadání), Báze $\mathcal{B}$ není ortonormální, matice přechodu mají sice jednotkové determinanty ale nejsou vzájemně transponované.