

Počtení praktikum 1

1b. zápočtová písemka - podzim 2016

1. Vypočítejte derivaci funkce $x^{(x+\operatorname{tg}^2 x)} \sqrt{\frac{1+3x^2}{1-3x^2}}$. Určete průnik definičních oborů zadané a výsledné funkce. (2,5 bodu)

$$\text{Výsledek: } x^{(x+\operatorname{tg}^2 x)} \left\{ \frac{6x}{(1-3x^2)\sqrt{1-9x^4}} + \left[\left(1 + \frac{2\sin x}{\cos^3 x} \right) \ln x + \frac{\operatorname{tg}^2 x}{x} + 1 \right] \sqrt{\frac{1+3x^2}{1-3x^2}} \right\}, x \in \left(0, \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

2. Vypočítejte integrál funkce $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{x \, dx}{\cot^2(2x)}$. (2,5 bodu)

$$\text{Výsledek: } \frac{1}{4} \left(\frac{\pi}{\sqrt{3}} - \frac{\pi^2}{18} - \ln 2 \right)$$

3. Válcová nádoba o poloměru R a výšce H je zcela vyplněná plynem, jehož hustota ρ je určena funkcí $\rho = A e^{-\frac{r}{3}} + Br$, kde A, B jsou kladné konstanty a r je vzdálenost od osy nádoby. Vypočítejte celkovou hmotnost M plynu v nádobě. (2,5 bodu)

$$\text{Výsledek: } M = 18\pi AH \left[1 - \left(1 + \frac{R}{3} \right) e^{-\frac{R}{3}} \right] + \frac{2\pi BHR^3}{3}$$

4. Vektor \vec{a} má v ortonormální bázi \mathcal{B} složky $(-2, 1, 1)$. Přejít mezi bázemi \mathcal{B} a \mathcal{B}' je dán vztahy

$$\vec{e}'_1 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 - 4\vec{e}_3, \quad \vec{e}'_2 = 2\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2 + \vec{e}_3, \quad \vec{e}'_3 = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 3\vec{e}_3.$$

Určete matici \mathbf{T} přechodu z báze \mathcal{B} do báze \mathcal{B}' , matici \mathbf{S} přechodu z báze \mathcal{B}' do báze \mathcal{B} a složky vektoru \vec{a} v bázi \mathcal{B}' . Určete determinanty matic \mathbf{T} a \mathbf{S} . Je báze \mathcal{B}' ortonormální (uved'te důvody pro nebo proti)? (2,5 bodu)

$$\text{Výsledek: } \mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -4 \\ 2 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \mathbf{S} = \begin{pmatrix} -10 & -1 & -13 \\ -7 & -1 & -9 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \vec{a}_{(\mathcal{B}')} = (12, 1, 16)$$

$\det \mathbf{T} = \det \mathbf{S} = 1$. Báze \mathcal{B}' není ortonormální, matice přechodu \mathbf{T}, \mathbf{S} mají sice jednotkový determinant, ale obě matice nejsou vzájemně transponované.