

Počtení praktikum 1: první(b) písemka - podzim 2017

1. Vypočítejte derivaci funkce $\frac{x^{\sin^2 x} \sqrt{x}}{\sqrt{a-bx}}$, kde a, b jsou kladné konstanty. (2,5 bodu)

$$\text{Výsledek: } \frac{x^{\sin^2 x}}{\sqrt{x(a-bx)}} \left[\sin^2 x + x \ln(x) \sin(2x) + \frac{a}{2(a-bx)} \right]$$

2. Vypočítejte integrál $\int_{\pi/6}^{5\pi/6} \frac{x-\pi}{\operatorname{tg}^2 x} dx$. Určete $\cap D_f$ zadané a výsledné funkce. (2,5 bodu)

$$\text{Výsledek: } \left[(\pi-x) \operatorname{cotg} x + \ln |\sin x| + \pi x - \frac{x^2}{2} \right]_{\pi/6}^{5\pi/6} = \pi^2/3 - \sqrt{3}\pi, x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

3. Válcová nádoba o poloměru 3 a výšce 5 je zcela vyplněna plynem, jehož tlak směrem od osy válce klesá. Pokles tlaku je vyjádřen funkcí $p = 6 \times 2^{-\frac{r^2}{9}}$, kde r je vzdálenost od osy válce. Vypočítejte velikost síly, kterou plyn působí na všechny stěny nádoby.¹ (2,5 bodu)

$$\text{Výsledek: } 18\pi \left(5 + \frac{3}{\ln 2} \right)$$

4. Vektor \vec{a} má v ortonormální bázi \mathcal{B}' složky $(1, 1, -2)$. Přejít mezi bázemi \mathcal{B} a \mathcal{B}' je dán

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 &= -4\vec{e}'_1 + \vec{e}'_2 - 3\vec{e}'_3, \\ \vec{e}_2 &= -7\vec{e}'_1 + \vec{e}'_2 - 5\vec{e}'_3, \\ \vec{e}_3 &= \vec{e}'_1 + \vec{e}'_3. \end{aligned}$$

Určete matici \mathbf{T} přechodu z báze \mathcal{B} do báze \mathcal{B}' , matici \mathbf{S} přechodu z báze \mathcal{B}' do báze \mathcal{B} a složky vektoru \vec{a} v bázi \mathcal{B} . Je báze \mathcal{B} ortonormální (zdůvodněte)? (2,5 bodu)

$$\text{Výsledek: } \mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \mathbf{S} = \begin{pmatrix} -4 & 1 & -3 \\ -7 & 1 & -5 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \vec{a}_{(\mathcal{B})} = (5, -4, -7), \text{ ne}$$

¹Veličiny jsou uváděny pouze jako velikost, nejsou uváděny příslušné jednotky.