

Počtení praktikum 1

1b. zápočtová písemka - podzim 2018

1. Vypočítejte derivaci funkce $(\cos x)^x \frac{x^2 \ln \sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}$. Určete průnik definičních oborů zadané a výsledné funkce. (2,5 bodu)

Výsledek: $\frac{x (\cos x)^x}{\sqrt{1-x}} \left\{ x \ln \sqrt{x} \left[\ln(\cos x) - x \operatorname{tg} x + \frac{1}{2(1-x)} \right] + 2 \ln \sqrt{x} + \frac{1}{2} \right\}, x \in (0, 1)$

2. Vypočítejte integrál $\int_0^{\sqrt{\pi}} x^5 \cos\left(\frac{x^2}{2}\right) dx$. (2,5 bodu)

Výsledek: $\pi^2 - 8$

3. Nevodivá koule o poloměru R je elektricky nabitá s objemovou hustotou náboje ρ . Vypočítejte celkový elektrický náboj Q koule (pokud by $\rho = \text{konst.}$, potom $Q = \rho V$, kde V je objem koule), pokud

$$\rho = Ar^2 + Br + C,$$

kde A, B, C jsou kladné konstanty a r je vzdálenost od středu koule. (2,5 bodu)

Výsledek: $Q = 4\pi R^3 \left(\frac{AR^2}{5} + \frac{BR}{4} + \frac{C}{3} \right)$

4. Vektor \vec{a} má v ortonormální bázi \mathcal{B} složky $(\sqrt{2}, 1, 1)$. Přejchod mezi bázemi \mathcal{B} a \mathcal{B}' je dán vztahy

$$\vec{e}'_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3, \quad \vec{e}'_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3, \quad \vec{e}'_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_3.$$

Určete matici \mathbf{T} přechodu z báze \mathcal{B} do báze \mathcal{B}' , matici \mathbf{S} přechodu z báze \mathcal{B}' do báze \mathcal{B} a složky vektoru \vec{a} v bázi \mathcal{B}' . Je báze \mathcal{B}' ortonormální (uveďte důvody pro nebo proti)? Určete velikosti vektoru \vec{a} v obou bázích. (2,5 bodu)

Výsledek: $\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 & -1 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 1 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 2 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_{(\mathcal{B}')} = (3, 1, 3\sqrt{2})$

Báze \mathcal{B}' není ortonormální, matice přechodu \mathbf{T}, \mathbf{S} mají jednotkový determinant, ale obě matice nejsou vzájemně transponované, $\|\vec{a}_{(\mathcal{B})}\| = 2, \|\vec{a}_{(\mathcal{B}')} \| = 2\sqrt{7}$.