Početní praktikum: 2. písemka - podzim 2023 Čas řešení ∼90 minut

1. Řešte obyčejnou diferenciální rovnici 1. řádu
$$y' = \frac{1}{\operatorname{tg}(x-y)} + 1,$$
jejím převedením na jednoduše separovatelný tvar, s podmínkou $y(0) = 0$. (2,5 bodu)

   Výsledek: $y = x - \arccos\left(\mathrm{e}^{x}\right)$

2. Řešte nehomogenní obyčejnou diferenciální rovnici 1. řádu
$$xy' + 5y = \frac{1+\cos x}{x^4},$$
s podmínkou $y(1) = 2 + \sin(1)$. (2,5 bodu)

   Výsledek: $y = \dfrac{\sin x + x + 1}{x^5}$

3. Řešte homogenní obyčejnou diferenciální rovnici 2. řádu
$$y'' - 2y' + 10y = 0,$$
s okrajovými podmínkami $y(0) = 1$, $y'(0) = 4$. Výsledek, včetně výpočtu příslušných konstant, vyjádřete v exponenciálním i goniometrickém tvaru. (2,5 bodu)

   Výsledek: $y = \mathrm{e}^{x}\left(\dfrac{1+\mathrm{i}}{2}\,\mathrm{e}^{-3\mathrm{i}x} + \dfrac{1-\mathrm{i}}{2}\,\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x}\right) = \mathrm{e}^{x}\left(\cos 3x + \sin 3x\right)$

4. Řešte obyčejnou diferenciální rovnici 2. řádu
$$y'' + 2y' + y = (x+1)\,\mathrm{e}^{-x} + \cos 2x,$$
s okrajovými podmínkami $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$. Pokud je to možné (v rovnici se vyskytuje tzv. speciální pravá strana), řešte metodou neurčitých koeficientů. **Bonusová úloha (+2,5 bodu):** Řešte i jinou metodou a porovnejte výsledky. (2,5 bodu)

   Výsledek: $y = \left(\dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x}{5} + \dfrac{3}{25}\right)\mathrm{e}^{-x} + \dfrac{4\sin 2x - 3\cos 2x}{25}$

   Při řešení metodou variace konstant dojde k integraci výrazu $C_1(x) = -\int x\,\mathrm{e}^{x}\cos 2x\,\mathrm{d}x$, tedy součinu tří funkcí, metodou per partes (funkce C_1, C_2 mohou být indexovány opačně), přičemž integrace druhé funkce, $C_2(x) = \int \mathrm{e}^{x}\cos 2x\,\mathrm{d}x$ $\left(= \int C_2'(x)\,\mathrm{d}x\right)$, je výrazně snazší. V takovém případě lze s výhodou postupovat způsobem
$$C_1(x) = \int x\,C_2'(x)\,\mathrm{d}x = x\,C_2(x) - \int C_2(x)\,\mathrm{d}x,$$
kdy integrujeme výhradně součiny pouze dvou funkcí, navíc již z velké části známé z předchozího řešení funkce C_2.