Početní praktikum 1

2a. zápočtová písemka

doba řešení - 60 minut

1. Řešte obyčejnou diferenciální rovnici 1. řádu $(xy - y)y' = 12$ jejím převedením na jednoduše separovatelný tvar, s počáteční podmínkou $y(2) = 0$. Určete průnik definičních oborů zadané rovnice a výsledné funkce. (2,5 bodu)

   Výsledek: $y = \pm\sqrt{\ln(x-1)^{24}}, \quad x \notin (0, 2)$

2. Řešte nehomogenní obyčejnou diferenciální rovnici 1. řádu $y' = x^2 \mathrm{e}^{-3/x} + \dfrac{3y}{x^2}$ s počáteční podmínkou $y(3) = 10/\mathrm{e}$. (2,5 bodu)

   Výsledek: $y = \left(\dfrac{x^3}{3} + 1\right) \mathrm{e}^{-3/x}$

3. Řešte homogenní obyčejnou diferenciální rovnici 2. řádu $y'' - 6y' + 13y = 0$ s okrajovými podmínkami $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$. Výsledek (včetně výpočtu příslušných konstant) vyjádřete v exponenciálním i goniometrickém tvaru. (2,5 bodu)

   Výsledek: $y = \dfrac{2+3\mathrm{i}}{4} \mathrm{e}^{(3+2\mathrm{i})x} + \dfrac{2-3\mathrm{i}}{4} \mathrm{e}^{(3-2\mathrm{i})x} = \mathrm{e}^{3x}\left(\cos 2x - \dfrac{3}{2}\sin 2x\right)$

4. Řešte nehomogenní obyčejnou diferenciální rovnici 2. řádu $y'' - 2y' + 2y = x^2 + \mathrm{e}^x \cos 2x$, metodou neurčitých koeficientů. (2,5 bodu)

   Výsledek: $y = \mathrm{e}^x\left(\mathrm{C}_1 \cos x + \mathrm{C}_2 \sin x - \dfrac{1}{3}\cos 2x\right) + \dfrac{x^2}{2} + x + \dfrac{1}{2}$