

Početní praktikum 1: druhá(a) písemka - podzim 2017

1. Řešte obyčejnou diferenciální rovnici 1. řádu: $y' - \frac{2y'}{x} + y = 0$,
jejím převedením na jednoduše separovatelný tvar, s počáteční podmínkou $y(1) = 2/e$.
Určete definiční obor výsledné funkce. (2,5 bodu)

Výsledek: $y = \frac{2e^{-x}}{(x-2)^2}, y = 0, x \neq 2$

2. Řešte nehomogenní obyčejnou diferenciální rovnici 1. řádu: $y' = x^2 e^{-3x} - y$,
s počáteční podmínkou $y(0) = 0$. (2,5 bodu)

Výsledek: $y = -\frac{1}{2} \left(x^2 + x + \frac{1}{2} \right) e^{-3x} + \frac{1}{4} e^{-x}$

3. Řešte homogenní obyčejnou diferenciální rovnici 2. řádu: $2y'' - 2y' + 5y = 0$,
s okrajovými podmínkami $y(0) = 1, y'(0) = 0$. Výsledek, včetně výpočtu příslušných
konstant, vyjádřete v exponenciálním i goniometrickém tvaru. (2,5 bodu)

Výsledek: $y = \frac{3+i}{6} e^{\frac{1+3i}{2}x} + \frac{3-i}{6} e^{\frac{1-3i}{2}x} = e^{x/2} \left[\cos\left(\frac{3}{2}x\right) - \frac{1}{3} \sin\left(\frac{3}{2}x\right) \right], y = 0$

4. Řešte obyčejnou diferenciální rovnici 2. řádu: $y'' - 6y' + 5y = x e^{5x} - 5 \cos x$.
Pokud se v rovnici vyskytuje tzv. speciální pravá strana, řešte metodou *neurčitých koeficientů*. Pokud ne, řešte metodou *variace konstant*. (2,5 bodu)

Výsledek: $y = C_1 e^x + \left(C_2 + \frac{x^2}{8} - \frac{x}{16} \right) e^{5x} + \frac{15 \sin x}{26} - \frac{5 \cos x}{13}$