

Počtení praktikum 2

3. jarní zápočtová písemka - 2018

1. Rozviňte zadanou funkci $f(x) = \pi + |x|$, $x \in \langle -L, L \rangle$, do Fourierovy řady. (2,5 bodu)

$$\text{Výsledek: } \pi + \frac{L}{2} + \frac{2L}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k - 1}{k^2} \cos\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$$

2. Zadané číslo $\sqrt[5]{1 - \frac{i}{\sqrt{3}}}$ napište v goniometrickém i v exponenciálním tvaru. (2,5 bodu)

$$\text{Výsledek: } \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{1/5} \left[\cos\left(\frac{11\pi}{30} + \frac{2k\pi}{5}\right) + i \sin\left(\frac{11\pi}{30} + \frac{2k\pi}{5}\right) \right], \quad \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{1/5} e^{i\left(\frac{11\pi}{30} + \frac{2k\pi}{5}\right)},$$

$$k = 0, 1, 2, 3, 4.$$

3. Imaginární část v holomorfní funkce $f(z)$ má tvar $v = \sin y (e^x - e^{-x}) + x$, kde x je $\text{Re}(z)$, y je $\text{Im}(z)$. Napište podobu celé funkce $f(z)$ jako funkce komplexní proměnné z . (2,5 bodu)

$$\text{Výsledek: } f(z) = 2 \cosh z + iz + C$$

4. Tenzor T_{ij} lze zapsat formou

$$T_{ij} = f \delta_{ij} + \alpha \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_k} \delta_{ij} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right),$$

kde $f(x, y, z)$ je libovolná skalární funkce, v_i jsou složky vektoru rychlosti a α je konstanta. Napište explicitní podobu prvků T_{xx} a T_{xy} tohoto tenzoru i jeho divergence (v kartézské soustavě), divergenci zapište také pomocí Einsteinovy a vektorové symboliky. (2,5 bodu)

$$\text{Výsledek: } T_{xx} = f + \alpha \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \vec{\nabla} \cdot \vec{v} \right), \quad T_{xy} = \alpha \frac{\partial v_y}{\partial x}.$$

$$\vec{\nabla} \cdot \mathbf{T} = \frac{\partial f}{\partial x} + 2\alpha \frac{\partial}{\partial x} (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}), \quad (1. \text{ složka})$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} + 2\alpha \frac{\partial}{\partial y} (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}), \quad (2. \text{ složka})$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} + 2\alpha \frac{\partial}{\partial z} (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}). \quad (3. \text{ složka})$$

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \alpha \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_k} + \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \right). \quad (\text{Einsteinova notace})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \mathbf{T} = \vec{\nabla} f + 2\alpha \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}). \quad (\text{vektorový zápis})$$