Početní praktikum 2: 3. písemka - jaro 2022

1. Rozviňte následující periodickou funkci do Fourierovy řady:

$$f(x) = 1 + x\,(2 - x)\,, \quad x \in \langle 0, 2\rangle.$$

Nakreslete periodickou sekvenci dané funkce a rozhodněte jestli je sudá, lichá anebo ani jedno z toho. (2,5 bodu)

Výsledek: $f(x) = \dfrac{5}{3} - \dfrac{4}{\pi^2}\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^2}\cos(k\pi x)$, daná sekvence je sudá.

2. Napište v goniometrickém a exponenciálním tvaru číslo $\sqrt[3]{\left(1 - \mathrm{i}\sqrt{3}\right)^7}$. (2,5 bodu)

Výsledek: $2^{7/3}\left[\cos\left(\dfrac{17\pi}{9} + \dfrac{2k\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\dfrac{17\pi}{9} + \dfrac{2k\pi}{3}\right)\right] = 2^{7/3}\exp\left[\mathrm{i}\left(\dfrac{17\pi}{9} + \dfrac{2k\pi}{3}\right)\right]$, $k = 0, 1, 2$

3. Nalezněte holomorfní funkci $f(z)$ komplexního čísla $z = x + \mathrm{i}y$, pokud je zadána její reálná část: (2,5 bodu)

$$u(x, y) = x - \frac{1}{2}\cos y\left(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}\right).$$

Výsledek: $f(z) = z - \cosh z + C$

4. Dva různé tenzory 2. řádu $\boldsymbol{P}$ a $\boldsymbol{Q}$ jsou (v $\mathbb{R}^3$) zadány ve tvaru

$$P_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_k}{\partial x_k} A_\alpha B_\alpha\, \delta ij,$$
$$Q_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{\partial v_m}{\partial x_m}\, \delta ij,$$

kde $\vec{v}$, $\vec{A}$, $\vec{B}$ jsou libovolné vektory. Napište explicitní tvar prvků P_{xx} a P_{xy} tenzoru $\boldsymbol{P}$ a divergenci tenzoru $\boldsymbol{Q}$ v indexové (Einsteinově) a vektorové notaci (tj. pomocí operátorů nabla, případně Laplace, a pomocí vektorových „šipek“) . (2,5 bodu)

Výsledek:

$$P_{xx} = \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right)(A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z) = \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{v}\right)\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right),$$

$$P_{xy} = \frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x} = -\left(\vec{\nabla}\times\vec{v}\right)_z,$$

$$\frac{\partial Q_{ij}}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2} \equiv \Delta\vec{v}$$