Početní praktikum 1

3. zápočtová písemka - podzim 2021

doba řešení - 90 minut

1. Vypočítejte polohu těžiště křivky $x^2 + (y+1)^2 = 4,\ y \geq 0$, s konstantní délkovou hustotou. Výsledek vyčíslete (přibližně nebo pomocí kalkulačky) a stručně diskutujte jeho geometrický smysl. (Nápověda: jedná se o část kružnice, pokud ji budete parametrizovat například úhlovou souřadnicí φ, potom počáteční a koncový bod budou mít hodnoty $\varphi = 30°$, $\varphi = 150°$.) (2,5 bodu)

   Výsledek: $x_T = 0,\ y_T = \dfrac{3\sqrt{3}}{\pi} - 1 \approx 0,65$

2. Vypočítejte práci, kterou vykoná síla $\vec{F} = (2x - y, 2x, z)$, která působí v matematicky kladném směru po dráze jednoho závitu válcové šroubovice o poloměru R s osou $(0, 0, z)$. Počáteční bod dráhy má souřadnice $(R, 0, 0)$, koncový bod má souřadnice $(R, 0, 2\pi b)$, transformační rovnice šroubovice jsou: $x = R\cos\varphi,\ y = R\sin\varphi,\ z = b\varphi$. Je toto silové pole konzervativní? Byla by práce nulová, pokud by bylo konzervativní? (2,5 bodu)

   Výsledek: $W = \pi\left(3R^2 + 2\pi b^2\right)$, pole není konzervativní, práce by obecně nebyla nulová (nejedná se o uzavřenou křivku).

3. Dokažte, že dané centrální silové pole $\vec{F} = -k\,\vec{r}\,\mathrm{e}^r$ je konzervativní a určete odpovídající potenciální energii E_p v bodě (X_0, Y_0, Z_0) pokud $E_p(0,0,0) = -E_0$. Veličina k je konstanta, $\vec{r}$ je polohový vektor, r je jeho velikost. (2,5 bodu)

   Výsledek: $E_\mathrm{p}(X_0, Y_0, Z_0) = k\left[\mathrm{e}^{\sqrt{X_0^2+Y_0^2+Z_0^2}}\left(\sqrt{X_0^2 + Y_0^2 + Z_0^2} - 1\right) + 1\right] - E_0$

4. Hypotetické centrální fyzikální pole je určeno potenciálem $\phi = A\mathrm{e}^{-r}$, kde A je kladná konstanta, r je velikost polohového vektoru $\vec{r}$. Určete vektor intenzity $\vec{E}$ tohoto pole a dokažte, že divergence tohoto pole, tedy $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = A\mathrm{e}^{-r}\left(\dfrac{2}{r} - 1\right)$. (2,5 bodu)

   Výsledek: $\vec{E} = A\mathrm{e}^{-r}\dfrac{\vec{r}}{r}$, $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = A\mathrm{e}^{-\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\left(\dfrac{2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} - 1\right)$.