

Početní praktikum 1: 3. písemka - podzim 2022

1. Vypočítejte práci síly $\vec{F} = (-y, x)$ po následující křivce: Nejprve z bodu $(0, 0)$ do bodu $(2, -2)$ po čtvrtkružnici se středem v bodě $(2, 0)$, dále po úsečce z bodu $(2, -2)$ do bodu $(2, 2)$ a nakonec z tohoto bodu zpět do výchozího bodu po čtvrtkružnici se středem opět v bodě $(2, 0)$. (2,5 bodu)

Výsledek: 4π

2. Určete polohu těžiště půlkružnice, dané rovnicí $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, $x \in \langle -R, R \rangle$, $y \in \langle 0, R \rangle$, s lineární hustotou $\tau = y^2$. Načrtněte zadanou křivku a polohu vypočítaného těžiště (zhruba) a stručně popište, jestli dává výsledek smysl (či ne). (2,5 bodu)

Výsledek: $x_T = 0$, $y_T = \frac{8}{3\pi}R$

3. Rozhodněte, zda dané fyzikální pole $\vec{E} = (-x^2 + y, x - y, z^4)$ je konzervativní; pokud ano, najděte jeho skalární potenciál ϕ , kalibrovaný podmínkou $\phi(0, 0) = 1$. (2,5 bodu)

Výsledek: $\phi = -\frac{x^3}{3} - \frac{y^2}{2} + \frac{z^5}{5} + xy - \frac{1}{5}$

4. Existuje (hypotetický) skalární potenciál $\phi = r - \ln r$, kde r je velikost polohového vektoru. Najděte intenzitu $\vec{E}$ tohoto pole a dokažte, že $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{r^2} - \frac{2}{r}$. Můžete použít i divergenci v kulových souřadnicích, kde polohový vektor má tvar $\vec{r} = (r, 0, 0)$ a divergence v tomto případě bude $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 E_r)$. (2,5 bodu)

Výsledek: $\vec{E} = (x, y, z) \left(\frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) \equiv \frac{1}{r} - 1$, $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} - \frac{2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \equiv \frac{1}{r^2} - \frac{2}{r}$