

Počtení praktikum 2

3a. jarní zápočtová písemka - 2023

1. Rozviňte zadanou funkci $f(x) = 2x + |x|$, $x \in \langle -1, 1 \rangle$, do Fourierovy řady. (2,5 bodu)

Výsledek: $\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^k - 1}{k^2 \pi} \cos(k\pi x) - \frac{2(-1)^k}{k} \sin(k\pi x) \right]$

2. Zadané číslo $\sqrt[7]{-2 - 2i\sqrt{3}}$ napište v goniometrickém i v exponenciálním tvaru. (2,5 bodu)

Výsledek: $2^{2/7} \left[\cos\left(\frac{4\pi}{21} + \frac{2k\pi}{7}\right) + i \sin\left(\frac{4\pi}{21} + \frac{2k\pi}{7}\right) \right] \equiv 2^{2/7} e^{i(\frac{4\pi}{21} + \frac{2k\pi}{7})}$, $k = 0, \dots, 6$

3. Imaginární část v holomorfní funkce $f(z)$ má tvar $v = \cos y (e^x + e^{-x}) + y$, kde x je $\operatorname{Re}(z)$, y je $\operatorname{Im}(z)$. Napište podobu celé funkce $f(z)$ jako funkce komplexní proměnné z . (2,5 bodu)

Výsledek: $f(z) = z + 2i \cosh z + C$

4. Tenzor T_{ij} lze zapsat formou

$$T_{ij} = \alpha \left[\left(\frac{\partial v_k}{\partial x_k} + \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) \delta_{ij} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right],$$

kde $f(x, y, z)$ je libovolná skalární funkce, v_i jsou složky vektoru rychlosti a α je konstanta. Napište explicitní podobu prvků T_{xx} a T_{xy} tohoto tenzoru i jeho divergence (v kartézské soustavě), kdy vektorové členy запиšte pomocí vektorové symboliky a skalární členy запиšte explicitně. (2,5 bodu)

Výsledek: $T_{xx} = \alpha \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{v} + \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial x} \right)$, $T_{xy} = \alpha \frac{\partial v_y}{\partial x}$,

$$\vec{\nabla} \cdot \mathbf{T} = \alpha \left[2\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \right) \right]$$