

Počtení praktikum 1

3a. zápočtová písemka

doba řešení - 60 minut

1. Vypočítejte práci, kterou vykoná síla $\vec{F} = (3x - y, x, z)$, která působí v matematicky kladném směru po dráze jednoho závitu válcové šroubovice o poloměru a s osou $(0, 0, z)$. Počáteční bod dráhy působící síly má souřadnice $(0, -a, -\frac{\pi b}{2})$, koncový bod má souřadnice $(0, -a, \frac{3\pi b}{2})$, transformační rovnice šroubovice jsou: $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = bt$. Je toto silové pole konzervativní? (2,5 bodu)

Výsledek: $W = \pi(2a^2 + \pi b^2)$, pole není konzervativní.

2. Dokažte, že dané centrální silové pole $\vec{F} = -\frac{k\vec{r}}{r}$, definované pro $r \geq 1$, je konzervativní a určete odpovídající potenciální energii v bodě $x, y, z = (X_0, Y_0, Z_0)$, pokud potenciální energie ve vzdálenosti $r = 1$ od bodu $x, y, z = (0, 0, 0)$ je rovna E_0 . Veličina k je konstanta, \vec{r} je polohový vektor, r je jeho velikost. (2,5 bodu)

Výsledek: $E_p = k(\sqrt{X_0^2 + Y_0^2 + Z_0^2} - 1) + E_0$

3. Určete polohu těžiště homogenního tělesa, ohraničeného seshora plochou $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ a zespoda kuželovou plochou $z = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{3}}$ (která tedy svírá s rovinou xy úhel 30°). (2,5 bodu)

Výsledek: $T \equiv (0, 0, \frac{9R}{16})$

4. Hypotetické centrální fyzikální pole je určeno potenciálem $\phi = \frac{A}{\sqrt{r^2 + 1}}$, kde A je kladná konstanta a r je velikost polohového vektoru \vec{r} . Určete vektor intenzity \vec{E} tohoto pole a dokažte, že divergence tohoto pole, tedy $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{3A}{(r^2 + 1)^{5/2}}$. (2,5 bodu)

$$\vec{E} = \frac{A\vec{r}}{(r^2 + 1)^{3/2}} = \frac{A(x, y, z)}{(x^2 + y^2 + z^2 + 1)^{3/2}}, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{3A}{(x^2 + y^2 + z^2 + 1)^{5/2}} = \frac{3A}{(r^2 + 1)^{5/2}}$$