Početní praktikum 1

3a. zápočtová písemka doba řešení - 60 minut

1. Vypočítejte práci, kterou vykoná síla $\vec{F} = \left(x^2, -y, z\right)$ působící v matematicky kladném směru po křivce dané předpisem $(x-1)^2 + y^2 = 1$, $z = 2$, z počátečního bodu $(1, -1, 2)$ do koncového bodu $(0, 0, 2)$. Je toto silové pole konzervativní ? (2,5 bodu)

   Výsledek: $W = \dfrac{1}{6}$, pole je konzervativní.

2. Dokažte, že dané silové pole $\vec{F} = -k\dfrac{\vec{r}}{r^3}$, definované pro $r \geq 1$, je konzervativní a určete odpovídající potenciální energii v bodě $X_0, Y_0, Z_0 = (2, 2, 1)$, pokud hodnotu potenciální energie ve vzdálenosti $r = 1$ od bodu $x, y, z = (0, 0, 0)$ stanovíme jako $E_0 = 0$. Veličina $k = 1{,}5$ je obecná konstanta, r je velikost polohového vektoru $\vec{r} = (x, y, z)$. (2,5 bodu)

   Výsledek: $E_p = k\left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{X_0^2 + Y_0^2 + Z_0^2}}\right) + E_0 = 1$

3. Vypočítejte polohu těžiště homogenního tělesa ($\rho =$ konst.), ohraničeného „seshora“ plochou $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ a „zespoda“ plochou $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. (2,5 bodu)

   Výsledek: $x_T = 0$, $y_T = 0$, $z_T = \dfrac{3R}{8\left(2 - \sqrt{2}\right)} \approx 0{,}64\,R$

4. Hypotetické fyzikální pole je určeno nesymetrickým potenciálem $\phi = \dfrac{Ax}{r}$, kde A je kladná konstanta a r je velikost polohového vektoru $\vec{r}$. Určete vektor intenzity $\vec{E}$ tohoto pole a dokažte, že divergence tohoto pole, tedy $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \dfrac{2\phi}{r^2}$. (2,5 bodu)

   Výsledek: $\vec{E} = \dfrac{-A\left(y^2 + z^2\right), Axy, Axz}{r^3}$, $\quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \dfrac{2Ax}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = \dfrac{2Ax}{r^3}$