Početní praktikum 1: třetí(a) písemka - podzim 2017[1]

1. Vypočítejte práci, kterou vykoná síla $\vec{F} = \left(y-3,\ \sqrt{x},\ xyz\right)$, působící po křivce dané předpisem $x + (y-2)^2 - 4 = 0$, $z = 7$, z počátečního bodu $A = (4, 2, 7)$ do bodu $B = (0, 4, 7)$. Je toto silové pole konzervativní ? Čím je bod A významný v rámci zadané křivky ? (2,5 bodu)

   Výsledek: $W = \pi - \frac{4}{3}$, pole není konzervativní, bod A je vrcholem zadané paraboly.

2. Dokažte, že dané silové pole $\vec{F} = -k\,\vec{r}\,\ln(r^2+1)$ je konzervativní. Pokud ano, určete jeho potenciální energii v bodě $P = (X_0, Y_0, Z_0) = (1, 1, 1)$, pokud potenciální energii v bodě $x, y, z = (0, 0, 0)$ stanovíme jako $E_0 = 3/2$. Veličina $k = 1$ je konstanta, r je velikost polohového vektoru $\vec{r} = (x, y, z)$. (2,5 bodu)

   Výsledek: $E_p = \frac{k}{2}\left\{(r^2+1)[\ln(r^2+1)-1]+1\right\}\Big|_{(1,1,1)} + E_0 = 4\ln 2$

3. Vypočítejte polohu těžiště homogenního tělesa, které vznikne průnikem dvou těles: $\mathcal{T}_1 = \left\{(x,y,z)|\, z \in \left\langle 0, \sqrt{R^2-x^2-y^2}\right\rangle\right\}$ a $\mathcal{T}_2 = \left\{(x,y,z)|\, z \le \sqrt{x^2+y^2}\right\}$. Nakreslete toto těleso. (2,5 bodu)

   Výsledek: $x_T = 0,\ y_T = 0,\ z_T = \frac{3\sqrt{2}}{16}R \approx 0{,}265\,R$

4. Hypotetické fyzikální pole je určeno potenciálem $\phi = -Ar - B\ln r$, kde A a B jsou kladné konstanty a r je velikost polohového vektoru $\vec{r}$. Určete vektor intenzity $\vec{E}$ tohoto pole a dokažte, že divergence tohoto pole, tedy $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{2A}{r} + \frac{B}{r^2}$. (2,5 bodu)

   Výsledek: $\vec{E} = \left(\frac{A}{r} + \frac{B}{r^2}\right)\vec{r}, \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{2A}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \frac{B}{(x^2+y^2+z^2)} = \frac{2A}{r} + \frac{B}{r^2}$

[1] Veličiny jsou uváděny pouze jako velikost, nejsou uváděny příslušné jednotky.