Početní praktikum 1: třetí(a) písemka - podzim 2018

1. Vypočítejte práci, kterou vykoná síla $\vec{F} = \left(-3 - y,\, x,\, \ln^2 z\right)$, působící po křivce dané předpisem $x^2 + (y+3)^2 - 1 = 0,\ z = 1$, z počátečního bodu $A = (1, -3, 1)$ v matematicky kladném směru do bodu $B = (-1, -3, 1)$ a dále po úsečce zpět do výchozího bodu A. Jak by se výsledná práce změnila v případě $\vec{F} = \left(-3 + y,\, x,\, \ln^2 z\right)$? (2,5 bodu)

   Výsledek: $W = \pi$, výsledná práce by byla nulová (konzervativní síla).

2. Dokažte, že dané silové pole $\vec{F} = -A\left(x^2 - z, z - y^2, z^2 - x + y\right)$, kde A je kladná konstanta, je konzervativní. Pokud ano, určete jeho potenciální energii v bodě $P = (1, 1, 1)$, označíme-li E_0 potenciální energii v bodě $x, y, z = (0, 0, 0)$. (2,5 bodu)

   Výsledek: $E_p = \dfrac{A}{3}\left(x^3 - y^3 + z^3 - 3xz + 3yz\right)\Big|_{(1,1,1)} + E_0 = \dfrac{A}{3} + E_0$

3. Vypočítejte polohu těžiště homogenního tělesa $\mathcal{T}_1 = \left\{(x, y, z)|\, z \in \left\langle 0, H - \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + y^2}\right\rangle\right\}$. Nakreslete toto těleso. (2,5 bodu)

   Výsledek: $x_T = 0,\ y_T = 0,\ z_T = \dfrac{H}{4}$ (kužel o výšce H a poloměru podstavy $R = 2H$)

4. Hypotetické fyzikální pole je určeno potenciálem $\phi = -Ar^3 - B\ln r$, kde A a B jsou kladné konstanty a r je velikost polohového vektoru $\vec{r}$. Určete vektor intenzity $\vec{E}$ tohoto pole a určete také jeho divergenci, tedy $\vec{\nabla} \cdot \vec{E}$. Jaká bude rotace vektoru $\vec{E}$? (2,5 bodu)

   Výsledek: $\vec{E} = \left(3Ar + \dfrac{B}{r^2}\right)\vec{r}, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \dfrac{12A\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{3/2} + B}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)} = 12Ar + \dfrac{B}{r^2},$
   $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\phi = \vec{0}$