Početní praktikum 1

3a. zápočtová písemka - podzim 2020 doba řešení - 90 minut

1. Vypočítejte práci, kterou vykoná síla $\vec{F} = \left(x^2, -y, z\right)$ působící v matematicky kladném směru po křivce dané předpisem $(x-1)^2 + y^2 = 1$, $z = 2$, z počátečního bodu $(1, -1, 2)$ do koncového bodu $(0, 0, 2)$. Je toto silové pole konzervativní ? (2,5 bodu)

   Výsledek: $W = \dfrac{1}{6}$, pole je konzervativní.

2. Dokažte, že dané centrální silové pole $\vec{F} = -k\,\vec{r}\,\mathrm{e}^r$ je konzervativní a určete odpovídající potenciální energii E_p v bodě $x, y, z = (X_0, Y_0, Z_0)$ pokud hodnota potenciální energie v bodě $x, y, z = (0, 0, 0)$ je rovna $-E_0 = -k$. Veličina k je konstanta, $\vec{r}$ je polohový vektor, r je jeho velikost. (2,5 bodu)

   Výsledek: $E_p(X_0, Y_0, Z_0) = E_0\left[\mathrm{e}^{\sqrt{X_0^2+Y_0^2+Z_0^2}}\left(\sqrt{X_0^2+Y_0^2+Z_0^2} - 1\right)\right]$

3. Vypočítejte polohu těžiště homogenního tělesa ($\rho =$ konst.), ohraničeného „seshora“ plochou $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ a „zespoda“ plochou $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. (2,5 bodu)

   Výsledek: $x_T = 0$, $y_T = 0$, $z_T = \dfrac{3R\left(2+\sqrt{2}\right)}{16} \approx 0{,}64\,R$

4. Hypotetické fyzikální pole je určeno potenciálem $\phi = A\,\mathrm{e}^{-r} + r^{-1}$, kde A je kladná konstanta a r je velikost polohového vektoru $\vec{r}$. Určete vektor intenzity $\vec{E}$ tohoto pole a dokažte, že divergence tohoto pole, tedy $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = A\,\mathrm{e}^{-r}\left(\dfrac{2}{r} - 1\right)$. (2,5 bodu)

   Výsledek: $\vec{E} = \left(A\mathrm{e}^{-r} + \dfrac{1}{r^2}\right)\dfrac{\vec{r}}{r}$, $\quad \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = A\,\mathrm{e}^{-r}\left(\dfrac{2}{r} - 1\right)$.