Početní praktikum 2

3. písemka - jaro 2021

doba řešení 90 minut

1. Rozviňte zadanou funkci do Fourierovy řady: (2,5 bodu)

$$f(x) = x - 2 \text{ pro } x \in \langle 2, 3), \quad f(x) = 4 - x \text{ pro } x \in \langle 3, 4).$$

   Je takto zadaná periodická funkce sudá, lichá, nebo ani jedno z toho?

   Výsledek: $f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k - 1}{k^2} \cos(k\pi x)$, funkce je sudá

2. Ověřte, zda je následující funkce $f(z)$ komplexní proměnné holomorfní: (2,5 bodu)

$$f(z) = \ln(z) + \frac{1}{z}.$$

   Výsledek: $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{x(x^2+y^2) + y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{y\left(x^2+y^2-2x\right)}{(x^2+y^2)^2}$, ano

3. Nalezněte celou holomorfní funkci komplexní proměnné $f(z)$, pokud je zadaná pouze (2,5 bodu)

$$\operatorname{Im} f(z) = \cosh x \cos y + \operatorname{arctg}\left(\tfrac{y}{x}\right)$$

   .

   Výsledek: $f(z) = \ln z + \mathrm{i} \cos(\mathrm{i}z) + C$

4. Hypotetický tenzor lze zapsat formou

$$T_{ij} = p\,\delta_{ij} + \alpha \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_k}{\partial x_k}\,\delta_{ij} \right),$$

   kde u_i je vektor rychlosti a α je koeficient. Napište explicitně prvky T_{xx} a T_{xy} tohoto tenzoru a napište také divergenci tohoto tenzoru vektorovou formou (použitím nabla operátoru a podobně). (2,5 bodu)

   Výsledek: $T_{xx} = p + \alpha \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \right)$, $T_{xy} = \alpha \frac{\partial u_x}{\partial y}$, $\vec{\nabla} \cdot \mathbf{T} = \vec{\nabla} p + \alpha \left[\Delta \vec{u} + \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}\right) \right]$