

Početni praktikum 2

3b. jarní zápočtová písemka - 2023

1. Rozviňte zadanou funkci $f(x) = |x - 4|$, $x \in (3, 5)$, do Fourierovy řady. Je funkce sudá, lichá nebo ani jedno z toho? (2,5 bodu)

Výsledek: $\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k - 1}{k^2} \cos(k\pi x)$

2. Zadané číslo $\sqrt[5]{3 - 3i}$ napište v goniometrickém i exponenciálním tvaru. (2,5 bodu)

Výsledek: $\sqrt[10]{18} \left[\cos \left(\frac{7\pi}{20} + \frac{2k\pi}{5} \right) + i \sin \left(\frac{7\pi}{20} + \frac{2k\pi}{5} \right) \right] \equiv \sqrt[10]{18} e^{i \left(\frac{7\pi}{20} + \frac{2k\pi}{5} \right)}, k = 0, \dots, 4$

3. Imaginární část $v(x, y)$ holomorfní funkce $f(z)$ komplexní proměnné z má tvar

$$v = \cos x \sinh y - \sin y \sinh x,$$

kde x je $\operatorname{Re}(z)$, y je $\operatorname{Im}(z)$. Napište podobu celé funkce $f(z)$ jako funkce komplexní proměnné z . (2,5 bodu)

Výsledek: $f(z) = \sin z - \cosh z + C$

4. Tenzor T_{ij} lze zapsat formou

$$T_{ij} = \left(\alpha f - \beta \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right) \delta_{ij} + \gamma \frac{\partial v_i}{\partial x_j},$$

kde $f(x, y, z)$ je libovolná skalární funkce, v_i jsou složky vektoru rychlosti a α, β, γ jsou konstanty. Napište explicitní podobu prvků T_{xx} a T_{xy} tohoto tenzoru i jeho divergence (v kartézské soustavě), kterou запиšte pomocí vektorové i indexové symboliky. (2,5 bodu)

Výsledek: $T_{xx} = \alpha f - \beta \vec{\nabla} \cdot \vec{v} + \gamma \frac{\partial v_x}{\partial x}, T_{xy} = \gamma \frac{\partial v_x}{\partial y},$

$$\vec{\nabla} \cdot \mathbf{T} \equiv \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} = \vec{\nabla} \left(\alpha f - \beta \vec{\nabla} \cdot \vec{v} \right) + \gamma \Delta \vec{v} \equiv \alpha \frac{\partial f}{\partial x_i} - \beta \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_i \partial x_j} + \gamma \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j}$$