Početní praktikum 1

3b. zápočtová písemka

doba řešení - 60 minut

1. Vypočítejte práci, kterou vykoná síla $\vec{F} = (2x - 2y, 2x, 2z)$, která působí v matematicky kladném směru po dráze jednoho závitu válcové šroubovice o poloměru a s osou $(0, 0, z)$. Počáteční bod dráhy působící síly má souřadnice $(-a, 0, -\pi b)$, koncový bod má souřadnice $(-a, 0, \pi b)$, transformační rovnice šroubovice jsou: $x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ z = bt$. Je toto silové pole konzervativní ? (2,5 bodu)

   Výsledek: $W = 4\pi a^2$, pole není konzervativní.

2. Dokažte, že dané centrální silové pole $\vec{F} = -k\,\vec{r}\,\mathrm{e}^r$ je konzervativní a určete odpovídající potenciální energii E_p v bodě $x, y, z = (X_0, Y_0, Z_0)$ pokud hodnota potenciální energie v bodě $x, y, z = (0, 0, 0)$ je rovna $-E_0 = -k$. Veličina k je konstanta, $\vec{r}$ je polohový vektor, r je jeho velikost. (2,5 bodu)

   Výsledek: $E_p(X_0, Y_0, Z_0) = E_0\,\mathrm{e}^{\sqrt{X_0^2+Y_0^2+Z_0^2}}\left(\sqrt{X_0^2 + Y_0^2 + Z_0^2} - 1\right)$

3. Určete polohu těžiště homogenního tělesa, ohraničeného seshora rotačním paraboloidem, popsaným rovnicí $z = H - x^2 - y^2$ (tedy $z = H - r^2$ ve válcových souřadnicích) a zespoda plochou $z = 0$. (2,5 bodu)

   Výsledek: $z_T = \dfrac{H}{3}$

4. Hypotetické centrální fyzikální pole je určeno potenciálem $\phi = A\mathrm{e}^{-r}$, kde A je kladná konstanta, r je velikost polohového vektoru $\vec{r}$. Určete vektor intenzity $\vec{E}$ tohoto pole a dokažte, že divergence tohoto pole, tedy $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = A\mathrm{e}^{-r}\left(\dfrac{2}{r} - 1\right)$. (2,5 bodu)

   Výsledek: $\vec{E} = A\mathrm{e}^{-r}\dfrac{\vec{r}}{r} = A\mathrm{e}^{-\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\dfrac{(x, y, z)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = A\mathrm{e}^{-\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\left(\dfrac{2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} - 1\right)$