Početní praktikum 1

3b. zápočtová písemka doba řešení - 60 minut

1. Vypočítejte práci, kterou vykoná síla $\vec{F} = \left(x^3, y, z^3\right)$, která působí nejprve v matematicky kladném směru po křivce, dané předpisem $x^2 + (y-3)^2 = 4$, $z = 5$, z bodu (0,1,5) do bodu (2,3,5) a potom po úsečce do bodu (3,1,5). Je toto silové pole konzervativní ? (2,5 bodu)

   Výsledek: $W = \dfrac{81}{4}$, pole je konzervativní.

2. Dokažte, že dané silové pole $\vec{F} = -k\,(x, y, z)\,\ln r^{-2}$, definované pro $r \geq 1$, je konzervativní a určete odpovídající potenciální energii v bodě $x, y, z = (X_0, Y_0, Z_0)$, pokud potenciální energie ve vzdálenosti $r = 1$ od bodu $x, y, z = (0,0,0)$ je rovna E_0. Veličina k je konstanta, r je velikost polohového vektoru $\vec{r} = (x, y, z)$. (2,5 bodu)

   Výsledek: $E_p = -\dfrac{k}{2}\left\{\left(X_0^2 + Y_0^2 + Z_0^2\right)\left[\ln\left(X_0^2 + Y_0^2 + Z_0^2\right) - 1\right] + 1\right\} + E_0$

3. Vypočítejte moment setrvačnosti homogenního tělesa ($\rho =$ konst.), ohraničeného seshora plochou $z = H - 2\left(x^2 + y^2\right)$ a zespoda plochou $z = 0$, vzhledem k ose z. Výsledek vyjádřete jako funkci hmotnosti daného tělesa a délky $R = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{H/2}$ v rovině $z = 0$. (2,5 bodu)

   Výsledek: $J = \dfrac{MR^2}{3}$

4. Hypotetické centrální fyzikální pole je určeno potenciálem $\phi = A^{-r}$, kde A je kladná konstanta, r je velikost polohového vektoru $\vec{r}$. Určete vektor intenzity $\vec{E}$ tohoto pole a dokažte, že divergence tohoto pole, tedy $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = A^{-r} \ln A \left(\dfrac{2}{r} - \ln A\right)$. (2,5 bodu)

   Výsledek: $\vec{E} = A^{-r} \ln A\, \dfrac{\vec{r}}{r}$, $\quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = A^{-\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \ln A \left(\dfrac{2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} - \ln A\right)$