Početní praktikum 1: třetí(b) písemka - podzim 2017[1]

1. Vypočítejte práci, kterou vykoná síla $\vec{F} = \left(x - y,\, x,\, \sqrt{z}\right)$ působící v matematicky záporném směru po křivce dané předpisem $(x-3)^2 + y^2 = 1$, $z = 3$, z počátečního bodu $(3, -1, 3)$ do koncového bodu $(2, 0, 3)$. Je toto pole konzervativní ? (2,5 bodu)

   Výsledek: $W = \dfrac{1-\pi}{2}$, pole není konzervativní.

2. Dokažte, že dané silové pole $\vec{F} = -k\dfrac{\vec{r}}{r+1}$ je konzervativní. Pokud ano, určete jeho potenciální energii v bodě $P = (X_0, Y_0, Z_0) = (1, 0, 0)$, pokud potenciální energii v bodě $x, y, z = (0, 0, 0)$ stanovíme jako $E_0 = \ln 2$. Veličina $k = 1$ je konstanta, r je velikost polohového vektoru $\vec{r} = (x, y, z)$. (2,5 bodu)

   Výsledek: $E_p = k\left[r - \ln(r+1)\right]\big|_{(1,0,0)} + E_0 = 1$

3. Vypočítejte polohu těžiště tělesa $\mathcal{T} = \{(x, y, z)|\, x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, z \geq 0\}$, jehož hustota $\rho = Az$ (kde A je kladná konstanta). (2,5 bodu)

   Výsledek: $x_T = 0$, $y_T = 0$, $z_T = \dfrac{8}{15}R$

4. Hypotetické fyzikální pole je určeno potenciálem $\phi = A\,\mathrm{e}^{-r} + r^{-1}$, kde A je kladná konstanta a r je velikost polohového vektoru $\vec{r}$. Určete vektor intenzity $\vec{E}$ tohoto pole a dokažte, že divergence tohoto pole, tedy $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = A\,\mathrm{e}^{-r}\left(\dfrac{2}{r} - 1\right)$. (2,5 bodu)

   Výsledek: $\vec{E} = \left(A\mathrm{e}^{-r} + \dfrac{1}{r^2}\right)\dfrac{\vec{r}}{r}$, $\quad \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = A\,\mathrm{e}^{-r}\left(\dfrac{2}{r} - 1\right)$.

[1] Veličiny jsou uváděny pouze jako velikost, nejsou uváděny příslušné jednotky.