# Početní praktikum 1

## 4. zápočtová písemka

doba řešení - 180 minut

1. Vypočítejte hodnotu derivace $f'(1)$ funkce $f(x) = (axe^x)^{\frac{b\ln x}{x^2}}$, kde $a, b$ jsou kladné konstanty. Určete průnik definičních oborů zadané rovnice a výsledné funkce a podmínku pro konstantu $a$. (2,5 bodu)

   Výsledek: $f'(1) = \dfrac{b}{x^3}(axe^x)^{\frac{b\ln x}{x^2}}\left[(1+x)\ln x + \ln(axe^x)\,(1-2\ln x)\right]\Big|_1 = b\,(1+\ln a),\ x>0,\ a>0.$

2. Vypočítejte určitý integrál $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (x+a)\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2 \mathrm{d}x$, kde $a$ je konstanta. (2,5 bodu)

   Výsledek: $\left[x\,\mathrm{tg}\,x + \ln(\cos x) - \dfrac{x^2}{2} + a\,\mathrm{tg}\,x - ax\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = 2a\left(1-\dfrac{\pi}{4}\right).$

3. Kruhová deska o poloměru $R$ je elektricky nabitá s plošnou hustotou náboje $\sigma = A\ln(r^2+B)$, kde $A$, $B$ jsou kladné konstanty a $r$ je vzdálenost od středu desky. Vypočítejte celkový elektrický náboj $Q$ desky [1] (velikost náboje by v případě konstantní plošné nábojové hustoty byla dána jejím součinem s velikostí příslušné plochy, $Q = \sigma S$). (2,5 bodu)

   Výsledek: $Q = \pi A\{(R^2+B)[\ln(R^2+B)-1] - B(\ln B - 1)\}.$

4. Vektor $\vec{a}$ má ve standardní kartézské bázi $\mathcal{E}$ složky $(1, -\sqrt{3}, 1)$. Dále jsou zadány dvě báze $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$, přičemž matice $R$ přechodu z báze $\mathcal{E}$ do báze $\mathcal{B}'$ má tvar

$$R(\mathcal{E} \longmapsto \mathcal{B}') = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Přechod z báze $\mathcal{B}'$ do báze $\mathcal{B}$ je dán vztahy

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 &= \vec{e}\,'_1 - \vec{e}\,'_2 - 2\vec{e}\,'_3, \\ \vec{e}_2 &= 2\,\vec{e}\,'_1 - \vec{e}\,'_2 + \vec{e}\,'_3, \\ \vec{e}_3 &= -\vec{e}\,'_1 + \vec{e}\,'_2 + 3\vec{e}\,'_3. \end{aligned}$$

   Určete matici $T$ přechodu z báze $\mathcal{B}$ do báze $\mathcal{B}'$, matici $S$ přechodu z báze $\mathcal{B}'$ do báze $\mathcal{B}$ a složky vektoru $\vec{a}$ v bázích $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$. Jsou báze $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ ortonormální (uveďte důvod)? (2,5 bodu)

   $T = \begin{pmatrix} -4 & 1 & -3 \\ -7 & 1 & -5 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $S = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_{(\mathcal{B}')} = (0, -2, 1)$, $\vec{a}_{(\mathcal{B})} = (15, -2, 11)$, $\mathcal{B}'$ ano, $\mathcal{B}$ ne.

5. Pomocí vhodné substituce řešte obyčejnou diferenciální rovnici 1. řádu $y' = e^{y+x^2} - 2x$. Určete průnik definičních oborů zadané rovnice a výsledné funkce. (2,5 bodu)

   Výsledek: $y = \ln\left[(C-x)^{-1}\right] - x^2$, $x \in (-\infty, C)$.

6. Řešte nehomogenní obyčejnou diferenciální rovnici 1. řádu $y' = 2x^3 - y + 1$ se stanovenou počáteční podmínkou $y'(0) = 0$. (2,5 bodu)

   Výsledek: $y = 2x^3 - 6x^2 - 11 + 12(x + e^{-x})$.

7. Řešte nehomogenní obyčejnou diferenciální rovnici 2. řádu $y'' - 3y' + 2y = (1-2x)\,e^x$ s okrajovými podmínkami $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$. (2,5 bodu)

   Výsledek: $y = 3e^x - 2e^{2x} + (x^2 + x)\,e^x$.

[1] Ve výsledcích příkladů s fyzikálními veličinami nejsou uváděny příslušné jednotky.

8. Řešte nehomogenní obyčejnou diferenciální rovnici 2. řádu $y'' - 2y' + 2y = \mathrm{e}^x \sin x$ s okrajovými podmínkami $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$. (2,5 bodu)

   Výsledek: $y = \dfrac{\mathrm{e}^x}{2}\left[(2 - x)\cos x - \sin x\right]$.

9. Vypočítejte práci, kterou vykoná síla $\vec{F}(x, y) = (-y, x)$, která působí po následující uzavřené křivce: nejprve po úsečce z bodu $(0, 0)$ do bodu $(2, 1)$, dále po úsečce do bodu $(2, 2)$ a nakonec po čtvrtkružnici se středem v bodě $(2, 0)$ v matematicky kladném směru zpět do výchozího bodu. Jak by se vykonaná práce změnila, kdyby působící síla $\vec{F}(x, y) = (y, x)$? (2,5 bodu)

   Výsledek: $W = 2(\pi - 1)$, konzervativní síla - práce by byla nulová.

10. Dokažte, že centrální silové pole $\vec{F} = -k\,\vec{r}\,\ln r$, definované pro $r \geq 1$, je konzervativní a určete potenciální energii pole v bodě $x, y, z = (X_0, Y_0, Z_0)$, pokud stanovíme její hodnotu v minimální definované vzdálenosti od bodu $x, y, z = (0, 0, 0)$ je jako nulovou. Veličina $k$ je konstanta, $\vec{r}$ je polohový vektor, $r$ je jeho velikost. (2,5 bodu)

    Výsledek: $E_\mathrm{p}(X_0, Y_0, Z_0) = \dfrac{k}{2}\left[\left(X_0^2 + Y_0^2 + Z_0^2\right)\left(\ln\sqrt{X_0^2 + Y_0^2 + Z_0^2} - \dfrac{1}{2}\right) + \dfrac{1}{2}\right]$.

11. Odvoďte moment setrvačnosti $J_k$ duté koule o poloměru $R$ s kulovou koncentrickou dutinou o poloměru $H$, s konstantní hustotou $\rho$, rotující okolo osy, procházející jejím středem. Výsledek vyjádřete v jednotkách hmotnosti $M$ duté koule, jejího poloměru $R$ a poloměru dutiny $H$. Pomocí limitního přechodu (případně jiným způsobem) následně odvoďte moment setrvačnosti $J_s$ homogenní kulové slupky o poloměru $R$. (2,5 bodu)

    Výsledek: $J_k = \dfrac{2}{5} M \dfrac{R^5 - H^5}{R^3 - H^3}$, $J_s = \lim\limits_{H \to R} J_k = \dfrac{2}{3} M R^2$.

12. Hypotetické centrální fyzikální pole, definované pro $r \geq 1$, je určeno potenciálem $\phi = -Ar^2 \ln r^2 + B$, kde konstanta $A$ škáluje velikost $r$ polohového vektoru $\vec{r}$, konstanta $B$ nastavuje hodnotu potenciálu $\phi$ v minimální definované vzdálenosti od bodu $x, y, z = (0, 0, 0)$. Určete vektor intenzity $\vec{E}$ tohoto pole a dokažte, že divergence tohoto pole, tedy $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = A\left(6 \ln r^2 + 10\right)$. (2,5 bodu)

    Výsledek: $\vec{E} = 2A\vec{r}\left(\ln r^2 + 1\right) = 2A(x, y, z)\left[\ln(x^2 + y^2 + z^2) + 1\right]$, $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = A\left(6 \ln r^2 + 10\right)$.