Početní praktikum 1

4. zápočtová písemka[1]

doba řešení - 180 minut

1. Vypočítejte derivaci $f'(x)$ funkce $f(x) = x^{\sin(\ln x)}\,\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}$, Určete průnik definičních oborů zadané rovnice a výsledné funkce. (2,5 bodu)

   Výsledek: $f'(x) = x^{\sin(\ln x)}\,\dfrac{(x^2+1)\left[\sin(\ln x) + \ln x \cos(\ln x)\right] - 1}{x^2\sqrt{1+x^2}}$, $x > 0$.

2. Vypočítejte určitý integrál $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left[(x \operatorname{tg} x + \mathrm{a}) \operatorname{tg} x + 1\right] \mathrm{d}x$, a je konstanta. (2,5 bodu)

   Výsledek: $\left[x \operatorname{tg} x + (1-\mathrm{a}) \ln(\cos x) - \dfrac{x^2}{2} + x\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \dfrac{\pi}{2}$

3. Kruhová deska o poloměru R je elektricky nabitá s plošnou hustotou náboje σ. Vypočítejte celkový elektrický náboj Q desky (velikost náboje by v případě $\sigma =$ konst. byla dána jejím součinem s velikostí příslušné plochy, $Q = \sigma S$), pokud $\sigma = A \ln\left(3r^2 + B\right) + Ar$, kde A, B jsou kladné konstanty a r je vzdálenost od středu desky. (2,5 bodu)

   Výsledek: $Q = \dfrac{\pi A}{3}\left[\left(3R^2 + B\right) \ln\left(3R^2 + B\right) - B \ln B + 2R^3 - 3R^2\right]$.

4. Vektor $\vec{a}$ má v *ortonormální* bázi $\mathcal{B}'$ složky $(1,1,1)$. Přechod mezi bázemi $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ je dán vztahy

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 &= \vec{e}\,'_1 - 2\vec{e}\,'_2 - 3\vec{e}\,'_3, \\ \vec{e}_2 &= 2\,\vec{e}\,'_1 - \vec{e}\,'_2 - \vec{e}\,'_3, \\ \vec{e}_3 &= -\,\vec{e}\,'_1 + \vec{e}\,'_2 + \vec{e}\,'_3. \end{aligned}$$

   Určete matici $\mathbf{T}$ přechodu z báze $\mathcal{B}$ do báze $\mathcal{B}'$, matici $\mathbf{S}$ přechodu z báze $\mathcal{B}'$ do báze $\mathcal{B}$ a složky vektoru $\vec{a}$ v bázi $\mathcal{B}$. Je báze $\mathcal{B}$ ortonormální (uveďte důvod) ? (2,5 bodu)

   Výsledek: $\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_{(\mathcal{B})} = (0,2,3)$, báze $\mathcal{B}$ není ortonormální.

5. Pomocí vhodné substituce řešte obyčejnou diferenciální rovnici 1. řádu $x^3 y' = x^2[y + \ln(x^2)]$. Určete průnik definičních oborů zadané rovnice a výsledné funkce. (2,5 bodu)

   Výsledek: $y = -2\left(\ln|x| + 1\right) + \mathrm{C}x$, $x \neq 0$.

6. Řešte nehomogenní obyčejnou diferenciální rovnici 1. řádu $y' = -\dfrac{4x}{x^2+1}y + \dfrac{1}{x^2+1}$, se stanovenou počáteční podmínkou $y(0) = 1$. (2,5 bodu)

   Výsledek: $y = \dfrac{1}{3}\left(x^3 + 3x + 3\right)\left(x^2+1\right)^{-2}$.

7. Řešte nehomogenní obyčejnou diferenciální rovnici 2. řádu $y'' + 4y' + 4y = \mathrm{e}^{-2x} \ln^2 x$. (2,5 bodu)

   Výsledek: $y = \mathrm{C}_1 \mathrm{e}^{-2x} + \mathrm{C}_2 x\,\mathrm{e}^{-2x} + \dfrac{x^2}{2}\mathrm{e}^{-2x}\left(\ln^2 x - 3\ln x + \dfrac{7}{2}\right)$, $x > 0$.

8. Řešte nehomogenní obyčejnou diferenciální rovnici 2. řádu $y'' - 2y' + 2y = \mathrm{e}^x \sin x$ s okrajovými podmínkami $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$. (2,5 bodu)

   Výsledek: $y = \dfrac{\mathrm{e}^x}{2}\left[(2-x)\cos x - \sin x\right]$.

[1] Ve výsledcích příkladů s geometrickými nebo fyzikálními veličinami nemusí být uvedeny příslušné jednotky.

9. Vypočítejte práci, kterou vykoná síla $\vec{F}(x, y) = (x - y, x)$, která působí po následující uzavřené křivce: nejprve po úsečce z bodu $(1, 1)$ do bodu $(1, 2)$, dále po čtvrtkružnici se středem v bodě $(1, 1)$ v matematicky záporném směru do bodu $(2, 1)$ a nakonec po úsečce zpět do výchozího bodu. Jak by se vykonaná práce změnila, kdyby působící síla $\vec{F}(x, y) = (x + y, x)$? (2,5 bodu)

   Výsledek: $W = -\dfrac{\pi}{2}$, konzervativní síla - práce by byla nulová.

10. Dokažte, že centrální silové pole $\vec{F} = -k\,\vec{r}\,\ln r$, definované pro $r \geq 1$, je konzervativní a určete potenciální energii pole v bodě $x, y, z = (X_0, Y_0, Z_0)$, pokud stanovíme její hodnotu v minimální definované vzdálenosti od bodu $x, y, z = (0, 0, 0)$ je jako nulovou. Veličina k je konstanta, $\vec{r}$ je polohový vektor, r je jeho velikost. (2,5 bodu)

    Výsledek: $E_\mathrm{p}(X_0, Y_0, Z_0) = \dfrac{k}{2}\left[\left(X_0^2 + Y_0^2 + Z_0^2\right)\left(\ln\sqrt{X_0^2 + Y_0^2 + Z_0^2} - \dfrac{1}{2}\right) + \dfrac{1}{2}\right]$.

11. Ve vhodně zvolené soustavě souřadnic vypočítejte polohu středu hmotnosti homogenní polokoule o poloměru R. (2,5 bodu)

    Výsledek: $z_T = \dfrac{3}{8}R$.

12. Hypotetické centrální fyzikální pole je určeno potenciálem $\phi = -Ar^3 + B$, kde konstanta A škáluje velikost r polohového vektoru $\vec{r}$, konstanta B nastavuje hodnotu potenciálu ϕ v bodě $x, y, z = (0, 0, 0)$. Určete vektor intenzity $\vec{E}$ tohoto pole a dokažte, že divergence tohoto pole, tedy $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 12Ar$. (2,5 bodu)

    Výsledek: $\vec{E} = 3A\vec{r}\,r = 3A\,(x, y, z)\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 12Ar = 12A\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.